Exercice 2

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - n)(\sqrt{n^2+n+1} + n)}{\sqrt{n^2+n+1} + n}$$

$$= \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+n+1} + n}$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1} + n}$$

Or $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$

Par ailleurs $\sqrt{n^2+n+1} + n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + 1\right)$

$$= 2n \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + 1}{2}$$

Et comme $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + 1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

on a l'equivalent : $\sqrt{n^2+n+1} + n \underset{+\infty}{\sim} 2n$

D'où par quotient :

$$\sqrt{n^2+n+1} - n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln\left(\frac{2n^2+4n+3}{7n^2+5n+1}\right) = \ln\left(\frac{2n^2}{7n^2}\left(\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{2n^2}}{1+\frac{5}{7n}+\frac{1}{7n^2}}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{7}\right) + \ln\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{2n^2}\right)$$

$$- \ln\left(1+\frac{5}{7n}+\frac{1}{7n^2}\right)$$

et comme $\ln\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{2n^2}\right) = o\left(\ln\left(\frac{2}{7}\right)\right)$

et $\ln\left(1+\frac{5}{7n}+\frac{1}{7n^2}\right) = o\left(\ln\left(\frac{2}{7}\right)\right)$

alors $\boxed{\ln\left(\frac{2n^2+4n+3}{7n^2+5n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{2}{7}\right)}$

c) On a

$$\sqrt{n^3+n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} n^{3/2}$$

De plus $n \underset{+\infty}{=} o\left(n^{3/2}\right)$

D'où $\boxed{\sqrt{n^3+n^2+1} - n \underset{+\infty}{\sim} n^{3/2}}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a d'après le cours :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On a donc $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2 \sim \frac{n^2}{3}}$

e) Notons que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

De même rappelons la limite :

$$\frac{e^{x}-1}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Ainsi comme $2/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a

$$\frac{e^{2/n}-1}{2/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On en deduit l'equivalent :

$$e^{2/n}-1 \underset{+\infty}{\sim} 2/n$$

Par quotient on a alors :

$$\frac{\sin(1/n)}{e^{2/n}-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

f. Notons que $\cos\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ D'où

$$\cos\frac{2}{n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\frac{2}{n} - 1\right)\right)$$

On a donc

$$\ln\left(\cos\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\frac{2}{n} - 1$$

Or on a la limite suivante :

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

En effet soit $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1}{x^2} = -2\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2$$

Or comme $\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$
(et composée)

On a par produit de limite

$$\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

D'où

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

On en deduit la limite :

$$\frac{\cos x - 1}{-\frac{x^2}{2}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Or $\frac{2}{n} \underset{n \to 0}{\longrightarrow} 0$ ainsi $\frac{\cos \frac{2}{n} - 1}{-\frac{2}{n^2}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

D'où $\cos \frac{2}{n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$

On a ainsi l'equivalent :

$$\ln\left(\cos \frac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$$

g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\ln(n^2+3n+7) = \ln\left(n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)\right)$$
$$= 2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)$$

Mais comme $2\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln\left(1+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

on a $\ln\left(1+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right) = o\left(2\ln(n)\right)$

D'où

$$\boxed{\ln(n^2+3n+7) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(n)}$$

h) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

et comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

De plus on a déjà vu que, comme

$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $e^{1/n}-1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ainsi

$$\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{e^{1/n}-1} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a, par définition de la partie entière :

$$\sqrt{n} - 1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$$

D'où comme $\sqrt{n} > 0$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \leq 1$$

Ainsi d'après le thm d'encadrement

$$\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

D'où $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \sim \sqrt{n}$

Par ailleurs $\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $\sin \frac{\pi}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$

Ainsi par produit

$$\boxed{\lfloor \sqrt{n} \rfloor \sin \frac{\pi}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{n}}}$$