Lycée Condorcer
PCSI

Comparaison

Comparaison de suites

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

1. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.**
2. **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.**
3. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,**

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$$

4. **Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$.**
5. **En déduire que**

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $x \in [0,1]$, on a :
   $$x^{n+1} \leq x^n \iff 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$$
   Et comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que pour tout $x \in [0,1]$,
   $$\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}}$$
   Et comme $0 \leq 1$, on a, par croissance de l'intégrale
   $$\begin{array}{rccc} & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx & \leq & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}dx \\ \iff & u_n & \leq & u_{n+1} \end{array}$$
   La suite est donc bien croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in [0,1]$. On a :
   $$\frac{1}{1+x^n} = 1 - \frac{x^n}{1+x^n}$$
   Or Comme $x \in [0,1]$, on a
   $$\begin{array}{rccc} & x^n & \leq & x^{n-1} \\ \iff & \dfrac{x^n}{1+x^n} & \leq & \dfrac{x^{n-1}}{1+x^n} \\ \iff & 1 - \dfrac{x^{n-1}}{1+x^n} & \leq & 1 - \dfrac{x^n}{1+x^n} \end{array}$$
   et comme $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ est positif on a même
   $$1 - \frac{x^{n-1}}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale (comme $0 < 1$), on a :

$$\int_0^1 1 - \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \leq u_n \leq \int_0^1 1 dx$$

Mais on a

$$\int_0^1 1 - \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx = \left[x - \frac{1}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n} \ln(2)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a l'inégalité :

$$1 - \frac{1}{n} \ln(2) \leq u_n \leq 1$$

Le théorème d'encadrement permet ainsi de conclure.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a les égalités :

$$\begin{aligned} 1 - u_n &= \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \end{aligned}$$

Considérons les applications de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{1+x^n} & v(x) = \dfrac{1}{n} \ln(1+x^n) \end{array}$$

En procédant à une intégration par partie on obtient :

$$1 - u_n = \left[x \frac{1}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n} \ln(1+x^n) \text{ d}x$$

On a donc bien : $\boxed{1 - u_n = \dfrac{\ln 2}{n} - \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n) \text{ d}x}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Considérons l'application définie sur $[0,x]$ par :

$$f(t) = \ln(1+t)$$

C'est une application dérivable et pour tout $t \in [0,x]$ on a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}$$

et comme $t \geq 0$, on a :

$$|f(t)| = \ln(1+t)$$

Cette application est décroissante sur $[0,x]$ ainsi le maximum de $|f'|$ est atteint en 0. On a donc d'après l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x :

$$|\ln(1+x) - \ln(1) \leq 1 \times |x - 0|$$

D'où comme x est positif :

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x}$$

5. Nous voullons montrer que

$$u_n - 1 + \frac{\ln 2}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or d'après la question 3., on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n - 1 + \frac{\ln 2}{n} = \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$$

Ainsi il suffit de montrer que l'intégrale ci-dessus est négligeable devant $\frac{1}{n}$. Nous allons donc calculer la limite quand n tend vers l'infini de

$$n \times \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, on a, d'après la question précédente et comme x est positif :

$$0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$$

Ainsi par croissance de l'intégrale $(0 < 1)$, on a

$$\int_0^1 0\ \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x$$

En calculant les deux intégrales aux extémintés on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1}$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $n \times \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a donc bien

$$\boxed{u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$