Lycée Condorcet 11 janvier 2025
PCSI

Devoir surveillé 6 Problèmes Mathématiques

3 heures

Problème I

Partie I : Un résultat

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante qui converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1. (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ.
   (b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L telle que : $L \leqslant \ell$
2. (a) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2v_{2n+1} - v_n \geqslant u_n$.
   (b) En déduire que $L = \ell$.

Partie II : Une application

On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad a_0 > 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$

3. (a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. Considérons l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}. \end{array}$$

   Montrer que f est décroissante.
5. On définit maintenant la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; b_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n en fonction de a_n et de f.
   (b) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
6. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k.$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer c_n en fonction de a_n et a_0.
   (b) Montrer que : $\quad a_n \sim \dfrac{2}{n}$.

Partie III : Une application de l'application

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad u_0 > 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que : $\quad u_n \sim \dfrac{n^2}{4}$.

Problème II : La série harmonique et une application

Dans tout ce problème, on notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dans un autre contexte, la suite H est appelée *série **harmonique***. Dans ce problème, on démontre que la suite (H_n) est divergente, et on précise la façon dont (H_n) tend vers l'infini. Une application est donnée.

Partie A. Divergence de la série harmonique

1. Justifier que (H_n) est une suite croissante. Quels sont les deux comportements possibles pour cette suite lorsque n tend vers l'infini ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'inégalité
$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
3. Démontrer par l'absurde que (H_n) tend vers $+\infty$.

Partie B. Vitesse de divergence.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En intégrant l'inégalité $\forall x \in [k, k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, justifier l'inégalité
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
En déduire l'encadrement
$$\forall n \geq 2 \quad H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}.$$
5. Démontrer que
$$H_n \sim \ln(n).$$

Partie C. Constante d'Euler.

Soit $u_n = H_n - \ln(n)$.

6. Démontrer que (u_n) converge, vers une limite finie comprise entre 0 et 1.

On note γ la limite précédente. Ce nombre, appelé *constante d'Euler*, vaut environ 0.577. À ce jour, on ne sait pas s'il est rationnel ou irrationnel.
On vient d'obtenir, dans les trois parties précédentes, le *développement asymptotique*

$$\boxed{H_n \;=\; \ln(n) \;+\; \gamma \;+\; o(1)} \quad .$$

Partie D. Une application.

Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

7. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
8. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
9. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité
$$S_{2n} = H_{2n+1} - H_n.$$
10. En utilisant le développement asymptotique encadré, démontrer que la limite de (S_n) est $\ln(2)$.