Lycée Condorcet
PCSI

11 janvier 2025

Devoir surveillé 6 Problèmes
Corrigé

3 heures

Problème I

Partie I : Un résultat

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante qui converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1. (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ.

(b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L telle que : $L \leqslant \ell$

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2v_{n+1} - v_n \geqslant u_n.$

(b) En déduire que $L = \ell$.

Corrigé :

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers ℓ on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u_k \leqslant \ell$$

En sommant ces inégalité on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant (n+1)\ell$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant \ell}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+2} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)u_k \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)(n+2)}u_k \end{aligned}$$

Mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \leqslant u_{n+1}$ ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)(n+2)}u_k &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)(n+2)}u_{n+1} \\ &\leqslant \frac{u_{n+1}}{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, on a montré à la question précédente qu'elle était majorée, elle converge.
Comme la suite est majorée par ℓ sa limite est inférieure à ℓ.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} 2v_{2n+1} - v_n &= \frac{2}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k \end{aligned}$$

Mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ainsi, pour tout $k \in [\![n+1, 2n+1]\!]$, $u_k \leqslant u_n$ d'où en sommant ces $n+1$ inégalités :

$$2v_{2n+1} - v_n \geqslant \frac{n+1}{n+1}u_n$$

On a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2v_{2n+1} - v_n \geqslant u_n}$$

(b) La suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle converge donc vers la même limite que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par somme la suite $(2v_{2n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $2L - L$ et comme daprès la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2v_{2n+1} - v_n \geqslant u_n$$

On a donc $L \geqslant l$.
Mais d'après la question $1(b)$ on a $L \leqslant l$ d'où

$$\boxed{L = \ell}$$

Partie II : Une application

On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad a_0 > 0 \quad$ **et** $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$

3. (a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4. Considérons l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}. \end{array}$$

Montrer que f est décroissante.

5. On définit maintenant la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; b_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}.$

(a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n en fonction de a_n et de f.

(b) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

6. Notons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k.$$

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer c_n en fonction de a_n et a_0.

(b) Montrer que : $\quad a_n \sim \dfrac{2}{n}$**.**

Corrigé :

3. (a) Par récurrence !

(b) Étudions la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n\left(1 - \sqrt{1+a_n}\right)}{\sqrt{1+a_n}}$$

D'après la question précédente a_n est positif ainsi

$$1 + a_n \geqslant 1$$

et donc, par croissance de l'application racine

$$\sqrt{1+a_n} \geqslant 1$$

D'où

$$1-\sqrt{1+a_n} \leqslant 0$$

On a donc, comme $a_n \geqslant 0$ et $\sqrt{1+a_n} \geqslant 0$

$$a_{n+1}-a_n \leqslant 0$$

la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. D'après la question $3a$ elle est minorée par 0 ainsi d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.
Comme l'application $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ est continue la limite ℓ_1 de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\ell_1}{\sqrt{1+\ell_1}} = \ell_1 &\iff \frac{\ell_1(1-\sqrt{1+\ell_1})}{\sqrt{1+\ell_1}} = 0 \\ &\iff \ell_1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1-\sqrt{1+\ell_1} = 0 \\ &\iff \ell_1 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. la fonction f est dérivable comme quotient d'applications dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \times x - (\sqrt{1+x}-1)}{x^2} \\ &= \frac{x-2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}-1)}{2x^2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{-x-2+2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}} \\ &= -\frac{\left(1-\sqrt{1+x}\right)^2}{2x^2\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

Le carré d'un réel étant toujours positifs, la dérivée de f est négative et donc f est décroissante.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ on a par définition

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{\sqrt{1+a_n}}{a_n} - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = f(a_n)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on a :

$$a_{n+1} \leqslant a_n$$

d'où, comme f est décroissante :

$$f(a_{n+1}) \geqslant f(a_n)$$

et donc, d'après la question précédente :

$$b_{n+1} \geqslant b_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a reconnait $f(x)$ comme le taux d'accroissement en 0 de l'application $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$. L'application g étant dérivable, comme composée d'applications dérivables. Le taux d'accroissement admet une limite en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

D'où

$$f(x) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

L'application f admet une limite en 0 la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ainsi par composition la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{b_n \longrightarrow \frac{1}{2}}$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}$$

On reconnait une suite télescopique. On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right)}$$

(b) Notons que, comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, d'après la première partie, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$. Ainsi on a

$$\frac{1}{na_n} - \frac{1}{na_0} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

et comme $\dfrac{1}{na_0} \longrightarrow 0$ on en déduit :

$$\frac{1}{na_n} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

D'où en multipliant par 2 on a :

$$\frac{2/n}{a_n} \longrightarrow 1$$

On en déduit

$$\boxed{a_n \sim \frac{2}{n}}$$

Partie III : Une application de l'application

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad u_0 > 0 \quad$ **et** $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$.

1. **Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.**
2. **Montrer par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.**
3. **Montrer que :** $\quad u_n \sim \dfrac{n^2}{4}$.

Corrigé :

1. Récurrence !
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = u_n + \sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n} \geqslant 0$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

D'après le théorème de la limite monotone $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ou diverge vers $+\infty$.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie notée ℓ_2. Comme l'application $x \mapsto x + \sqrt{x}$ est continue la limite ℓ_2 vérifie alors :

$$\ell_2 = \ell_2 + \sqrt{\ell_2} \Longleftrightarrow \sqrt{\ell_2} = 0 \Longleftrightarrow \ell_2 = 0$$

Mais on a vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était croissante et, par définition, $u_0 > 0$ d'où la contradiction. Ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

3. *Il est bien noté que c'est une application de l'application. Il faut bien trouver le rapport !* On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_n + \sqrt{u_n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_n}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{u_n}}}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{u_n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{u_n}}}} \end{aligned}$$

On a ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1 + a_n}}}$$

et on reconnait la suite de la partie précédente. Et comme on a montré que

$$a_n \sim \frac{n}{2}$$

Or par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{1}{a_n^2}$$

ainsi par inverse et carré on a bien :

$$\boxed{u_n \sim \frac{4}{n^2}}$$

Problème II : La série harmonique et une application

Dans tout ce problème, on notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dans un autre contexte, la suite H est appelée *série harmonique*. Dans ce problème, on démontre que la suite (H_n) est divergente, et on précise la façon dont (H_n) tend vers l'infini. Une application est donnée.

Partie A. Divergence de la série harmonique

1. **Justifier que (H_n) est une suite croissante. Quels sont les deux comportements possibles pour cette suite lorsque n tend vers l'infini ?**
2. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'inégalité**
$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
3. **Démontrer par l'absurde que (H_n) tend vers $+\infty$.**

Partie B. Vitesse de divergence.

4. **Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En intégrant l'inégalité $\forall x \in [k, k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, justifier l'inégalité**
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
En déduire l'encadrement
$$\forall n \geq 2 \quad H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}.$$

5. Démontrer que

$$H_n \sim \ln(n).$$

Partie C. Constante d'Euler.

Soit $u_n = H_n - \ln(n)$**.**

6. Démontrer que (u_n) **converge, vers une limite finie comprise entre** 0 **et** 1**.**

On note γ **la limite précédente. Ce nombre, appelé** ***constante d'Euler*****, vaut environ** 0.577**. À ce jour, on ne sait pas s'il est rationnel ou irrationnel.**
On vient d'obtenir, dans les trois parties précédentes, le ***développement asymptotique***

$$\boxed{H_n \ = \ \ln(n) \ + \ \gamma \ + \ o(1)} \quad .$$

Partie D. Une application.

Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie par :**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

7. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite.**

8. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge.**

9. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**, l'égalité**

$$S_{2n} = H_{2n+1} - H_n.$$

10. En utilisant le développement asymptotique encadré, démontrer que la limite de (S_n) **est** $\ln(2)$**.**

Partie A. Divergence de la série harmonique

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$. La suite (H_n) est donc bien croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite finie, soit elle tend vers $+\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculons
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$
On a minoré chacun des termes de la somme par le plus petit d'entre eux !
3. Supposons que (H_n) ne tend pas vers $+\infty$. D'après la question 1, (H_n) converge vers une limite finie, notons-là ℓ. En passant à la limite dans l'inégalité obtenue en 2, on obtient
$$\ell - \ell \geq 0 \qquad \text{soit} \quad 0 \geq \frac{1}{2}.$$
Ceci étant faux, on en déduit que $H_n \to +\infty$.

Partie B. Vitesse de divergence.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Intégrons l'inégalité $\forall x \in [k, k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$. Puisque $0 \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, \mathrm{d}t,$$
ce qui donne bien
$$\frac{1}{k+1} \leq \ [\ln(t)]_k^{k+1} \ \leq \frac{1}{k}.$$

Sommons, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ $(n \geq 2)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Le télescopage, ainsi qu'un changement d'indice à gauche donne

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1) \leq H_{n-1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. *Parlons de stratégie. Il nous faut démontrer l'existence d'une limite, et l'énoncé nous a fait montrer des inégalités... On se dirige donc vers une utilisation du théorème des gendarmes.*

   Encadrons $\frac{H_n}{\ln(n)}$. Soit $n \geq 2$. L'inégalité de la question 2 (à gauche) donne

$$H_n \leq 1 + \ln(n) \qquad \text{soit} \quad \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

   L'inégalité de la question 2 (à droite), écrite pour $n+1$ donne

$$\ln(n+1) \leq H_n \qquad \text{soit} \quad \frac{H_n}{\ln(n)} \geq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}.$$

   On a donc l'encadrement

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

   On a $1 + \frac{1}{\ln(n)} \to 1$. De plus,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1.$$

   D'après le théorème des gendarmes, on a bien

$$\frac{H_n}{\ln(n)} \to 1.$$

Partie C. Constante d'Euler.

Intéressons-nous à la monotonie de (u_n). Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

Cette différence est négative, d'après la première inégalité prouvée en partie B : la suite (u_n) est donc décroissante. De plus,

$$u_n = H_n - \ln(n) \geq H_{n-1} - \ln(n) \geq 0,$$

d'après une autre inégalité de la partie B. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie, que nous allons noter γ. Par stabilité des inégalités larges, on obtient $\gamma \geq 0$. De plus, (u_n), décroissante, est majorée par son premier terme $u_1 = 1$: cela donne en passant à la limite $\gamma \leq 1$.

Partie D. Une application.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   On a de même :

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)}$$

La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
On a enfin :

$$S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes ainsi elles convergent vers une même limite.

2. Les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ainsi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite.

3. *On propose dans ce corrigé une preuve par un calcul direct, en discutant la parité de l'indice. Si vous avez peur de ne pas savoir gérer ce type de calcul, vous pouvez envisager un raisonnement par récurrence.*

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{2j}}{2j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2j+1}}{2j+2} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} \end{aligned}$$

   Pour faire apparaître la quantité H_{2n+1}, on va ajouter à la première somme les termes de H_{2n+1} d'indice pair : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2j}$, soit $\frac{1}{2}H_n$:

$$S_{2n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2j} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = H_{2n+1} - H_n.$$

4. D'après la question 6, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= H_{2n+1} - H_n \\ &= \ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1} - (\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) \\ &= \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \varepsilon_{2n+1} - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

   Or, $\varepsilon_{2n+1} \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$ et $\ln(2+\frac{1}{n}) \to \ln(2)$ (la fonction ln étant continue en 2). On en déduit que (S_{2n}) a pour limite $\ln(2)$. Elle a aussi pour limite la limite de (S_n), dont elle est extraite, ce qui achève de prouver que (S_n) tend vers $\ln(2)$.