Lycée Condorcet
PCSI

Janvier 2025

Limites et continuité

Limites

Exercice 1.
Calculer, si elle existe, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto \dfrac{3x^3+2x^2+x-1}{5x^3+12x^2+7x+6},\ a=+\infty$ b) $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+2}{(2x+1)(3x-5)(x+11)},\ a=+\infty$

c) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2)+\ln(2x)-x^3}{3x^3+\sin x - x},\ a=+\infty$ d) $f : x \mapsto x\ln(xe^{1/x}),\ a=0$ e) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - \sin 2x}{x^2},\ a=0$

f) $f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right),\ a=0$ g) $f : x \mapsto \sin(x^2)\sin(\frac{1}{x^3}),\ a=0$ h) $f : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor,\ a=0, a=+\infty$

i) $f : x \mapsto \dfrac{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor+x}{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor-x},\ a=0$ j) $f : x \mapsto \dfrac{x^n-a^n}{x^p-a^p},\ (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ a\in\mathbb{R}$

k) $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},\ a=+\infty$ l) $f : x \mapsto \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sin x}},\ a=0$

m) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x-1}-x,\ a=+\infty$ n) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ $a=0^+$ et $a=+\infty$

o) $f : x \mapsto (1+x)^{1/x}$ $a=0$ p) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$ $a=0$ et $a=+\infty$

q) $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $a=0$ r)

Exercice 2.
Déterminer les limites suivantes, si elles existent et montrer qu'elles n'existent pas le cas échéant :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x\cos\frac{1}{x}$	b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin x$	c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}}{x}$

Continuité

Exercice 3.
Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto \sin(x+1)\ln|x+1|$
2. $f : \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $f : \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $f : \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto \sin x\sin\frac{1}{x}$
5. $f : \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto |x|^\alpha\sin x\sin\frac{1}{x}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$ (on discutera suivant les valeurs de α)
6. $f : \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x>0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si} \quad x<0\end{cases}$
7. $f : \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto \dfrac{|\,x\,|}{x}$

Exercice 4.
Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis préciser la valeur de $f(1)$.
2. Montrer que f est continue au point 1.

Exercice 5.
Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto (x^2-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$
2. $g : x \longmapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x)$
3. $h : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
4. $x \longmapsto \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$

Exercice 6.
Montrer qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule sur une partie dense de $\mathbb{R}$ est identiquement nulle.
Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et égales sur une partie dense de $\mathbb{R}$, alors $f = g$.

Exercice 7.
Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 2-x \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un unique a de l'intervalle $]0,2[$ tel que f soit continue en ce point, et déterminer celle-ci.

Exercice 8.
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.
   (b) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
2. Montrer que si f est continue en 0, alors f est une homothétie.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 9.
Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 10.
Soit $f : [a,b]$ une fonction continue.

1. On suppose que $f([a,b]) \subset [a,b]$, montrer que f admet un point fixe.
2. Même question lorqu'on suppose $[a,b] \subset f([a,b])$.

Exercice 11.
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$.
Elle admet un point fixe (cf exercice précédent).
On suppose de plus que f est **contractante** c'est à dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[a, b]$. On le note c.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réucrrente définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - c| \leq k|u_n - c|$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

Exercice 12.
Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe $c \in [0, 1 - 1/n]$ telq ue le taux d'accroissement de f entre c et $c + 1/n$ est le même que le taux d'accroissement de f entre 0 et 1.

1. Traiter le cas $f(0) = f(1) = 0$. *Considérer l'application $x \mapsto f(x + 1/n) - f(x)$, et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n)$.*
2. Traiter le cas général.

Exercice 13.
Montrer qu'une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 14.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est constante. *(Indication : on pourra montrer qu'une telle fonction vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$)*

Exercice 15.
Soit f la fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Montrer que l'image d'un intervalle par f est un intervalle.

Nous venons ainsi de voir que la réciproque du TVI n'est pas vraie !

Exercice 16.
Soit f une application croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et soit $c > 1$. On suppose que

$$\frac{f(cx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{f(dx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$