Lycée Condorcet
PCSI

Février 2022

# Limites et continuité

**Théorème 1.**

Une fonction continue sur un segment y est bornée, et y atteint ses bornes.

Plus précisément, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, alors il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.
Les réels $f(c)$ et $f(d)$ sont alors les minimum et maximum globaux de $f$ sur $[a,b]$.

Démonstration

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, montrons qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes.
Notons $E$ l'ensemble défini par :

$$E = \left\{x \in [a,b] \mid f\,|_{[a,x]} \text{ est bornée}\right\}$$

Cet ensemble est non vide puisque $a \in E$, et est majoré par $b$. Il admet donc une borne supérieure. Notons la $\ell$.
La démonstration se structure en trois parties :

- Nous montrerons tout d'abord que $\ell = b$.
- Une borne supérieure n'étant pas toujours un maximum (elle n'appartient pas nécessairement à l'ensemble) nous montrerons ensuite que $\ell \in E$. Ceci montrera que $f$ est bornée sur $[a,b]$.
- Enfin il restera à montrer que les bornes de $f$ sont atteintes.

- **Montrons par l'absurde que** $\ell = b$.
  Supposons donc que $\ell \neq b$.
  Comme $f$ est continue en $\ell$ ($[a,b]$ étant un intervalle $\ell \in [a,b]$). Il existe un voisinage de $\ell$ où $f$ est bornée. C'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que :
  $$\exists M_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in [\ell-\eta, \ell+\eta] \quad |f(x)| \leq M_1$$
  Mais, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_0 \in E$ tel que $\ell - \eta < x_0 \leq \ell$. Par définition de $E$, la fonction $f$ est alors bornée sur l'intervalle $[a, x_0]$. C'est à dire :
  $$\exists M_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a, x_0] \quad |f(x)| \leq M_2$$
  Or, comme $\ell - \eta < x_0 \leq \ell$, on a $[a,x_0] \cup [\ell-\eta, \ell+\eta] = [a, \ell+\eta]$ et en posant $M = \max(M_1, M_2)$ on a :
  $$\forall x \in [a, l+\eta] \quad |f(x)| \leq M$$
  Ce qui montre que $\ell + \eta \in E$ mais $\ell + \eta > \ell$, $\ell$ n'est donc pas la borne supérieure de $E$. D'où la contradiction. On en déduit que $\ell = b$.

- **Montrons maintenant que cette borne suprieure est en fait un maximum.**
  Comme $f$ est continue en $b$, il existe un voisinage de $b$ sur lequel la fonction $b$ est bornée. Ainsi il existe $\eta > 0$, tel que :
  $$\exists M_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in [b-\eta, b] \quad |f(x)| \leq M_1$$
  Mais $b$ est la borne supérieure de $E$ donc, par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_0 \in E$ tel que $b - \eta < x_0 \leq b$. Par définition de $E$ la fonction $f$ est bornée sur $[a, x_0]$, donc
  $$\exists M_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a, x_0] \quad |f(x)| \leq M_2$$
  Et comme $b - \eta < x_0 \leq b$, on a $[a, x_0] \cup [b-\eta, b] = [a,b]$ et en posant $M = \max(M_1, M_2)$ on a :
  $$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq M$$
  **La fonction $f$ est donc bornée sur** $[a,b]$**.**

À ce point de la démonstration, nous avons donc montré que toute fonction continue sur un segment était bornée.

- **Montrons par l'absurde que $f$ atteint ses bornes.**
  Pour cela nous allons utiliser une autre caractérisation de la borne supérieure.
  Si $A$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, on a :

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A. \\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, x_n \to M. \end{cases}$$

  Considérons $F$ l'ensemble image de $f$, on a :

$$F = \left\{ f(x) \mid x \in [a,b] \right\}$$

  D'après ce qui précède cet ensemble est majoré et il est clairement non vide. Notons $s$ sa borne supérieure et supposons que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \neq s$. On suppose ici que $f$ n'atteint pas son maximum.
  On considère alors l'application $g$ définie par :

$$g : \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{s - f(t)} \end{cases}$$

  Comme on a supposé que $s$ n'était pas un maximum, elle est bien définie. Elle est continue comme quotient d'un fonction continue ne s'annulant pas. Ainsi, d'après ce qui précède elle est bornée.
  Or, d'après la caractérisation de la borne supérieure donnée plus haut, il existe une suite d'élément de $F$ qui converge vers $s$. Ainsi, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ telle que $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $s$.
  De plus comme $s$ est aussi un majorant de $F$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(t_n) \leq s$$

  D'où

$$g(t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  Ce qui est en contradiction avec le fait que $g$ soit bornée sur $[a,b]$.
  **Ainsi $f$ atteint son maximum**.
  Un raisonnement simlaire montre que $f$ atteint son minimum.