

## Programme de colles 15

La colle se déroulera en deux temps.

1. Le cours :

- Il vous sera demandé d'énoncer une définition ou proposition du cours (pas nécessairement dans la liste des propositions exigibles).
- Vous devrez ensuite démontrer une des propositions dont la liste figure dans ce programme (avant de la démontrer vous devrez l'énoncer).

2. Exercice(s) :

Le ou la colleuse vous donnera un ou plusieurs exercices à faire portant sur le programme de colles.

Dans un premier temps la connaissance du cours suffira pour obtenir une note supérieure (ou égale) à la moyenne. Connaître son cours implique bien évidemment de réussir les questions de cours mais pas seulement. Le colleur est à même de juger que le cours n'est pas suffisamment connu pendant le ou les exercices.

La colle portera sur les chapitres, **Suites (2)** et **Étude asymptotique des suites réelles** et **Limites et continuité**.

### Suites (2)

1. Limites finies

- Définitions, propriétés.
- Suites extraites et limites finies.
- Opérations sur les limites finies.
- Limites finies et ordre.

2. Limites infinies

- Définitions et propriétés
- Opérations sur les limites finies ou infinies

3. Monotonie et convergence

- (a) Théorème de la limite monotone
- (b) Suites adjacentes

4. Suites usuelles

- (a) Croissances comparées
- (b) Suites récurrentes

5. Une introduction aux suites complexes

### Étude asymptotique des suites réelles

- 1. Domination et négligeabilité
- 2. Suites équivalentes

#### Démonstrations-exercices exigibles

- Proposition 3, opérations sur les négligeabilités et dominations.
- Exemple 6 : Vérifier que 
$$\frac{(\ln(n+1) - \ln(n))^{5/2} \ln(n) \sqrt{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \sin(\frac{1}{n^3})} \sim \frac{\ln(n)}{n}.$$

## Limites et continuité

### 1. Définitions et premières propriétés

Limites, limites à gauche et à droite, opérations sur les limites, théorème d'existence de limite.

### 2. Continuité en point.

Définitions, prolongement par continuité, suites et fonctions continues, opérations sur les fonctions continues en un point.

### 3. Continuité sur un intervalle et propriétés globales.

Continuité sur un intervalle, opérations. Image d'un intervalle par une fonction continue, TVI et théorème des bornes atteintes.

### 4. Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ .

## Démonstrations-exercices exigibles

- Théorème 10 (caractérisation séquentielle de la limite).
- Proposition 11 opération algébrique sur les limites.
- Théorème 15 (théorème d'encadrement).
- Théorème 17 (théorème de la limite monotone) le cas  $f$  croissante minorée ou non.
- Théorème 31 (théorème des valeurs intermédiaires).

## Savoir-faire de base

- Utilisation de la caractérisation séquentielle de la limite pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point ou en  $+\infty$ .
- Connaître les limites usuelles (croissances comparées et autres).
- Utiliser les opérations algébriques sur les limites et la composition de limites dans un calcul de limite.
- Utiliser à bon escient les théorèmes globaux pour établir la continuité d'une fonction.
- Savoir quand ils ne s'appliquent pas et savoir étudier localement la continuité (fonctions définies par morceaux ou produit somme etc d'applications non continues).
- Utiliser le TVI dans le cas des suites définies implicitement, problème de point fixe, ...