Lycée Condorcet — Janvier 2023
PCSI

Dérivation

Table des matières

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervallle non vide et non réduit à un point.

1 Dérivée en un point. Fonction dérivée

1.1 Dérivée en un point

Définition 1.

Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est **dérivable** en x_0 s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel qu'en considérant, pour $x \in I \setminus \{x_0\}$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, on ait

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell.$$

Dans ce cas, le réel ℓ s'appelle la **dérivée de f en** x_0, et est noté $f'(x_0)$.

Définition 2.

Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$.

1. Supposons $I \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$.
   On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.
   Dans ce cas, on note $f'_g(x_0)$ cette limite.
2. Supposons $I \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$.
   On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.
   Dans ce cas, on note $f'_d(x_0)$ cette limite.

• **Remarque.** Avec les mêmes notations, si x_0 n'est pas une borne de I (on peut approcher x_0 par la gauche et par la droite), on a l'équivalence : f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Proposition 3.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$. Supposons que f soit dérivable en x_0.
<u>Alors</u> il existe une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

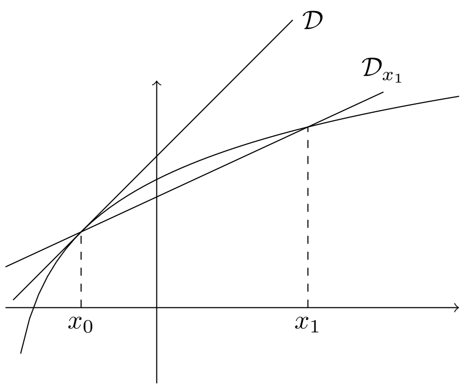
Réciproquement, s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$, alors f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = \ell$.

Corollaire 4.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.
La réciproque est fausse.

1.2 Interprétation géométrique

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0.



Notons

$$\mathcal{D} : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

et pour $x_1 \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\mathcal{D}_{x_1} : y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

La droite $\mathcal{D}_{x_1}$ est la droite qui relie les points du graphe d'abscisse x_0 et x_1. Son coefficient directeur est $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.
Quand x_1 tend vers x_0, la droite $\mathcal{D}_{x_1}$ tend à se confondre avec la droite $\mathcal{D}$.
La droite $\mathcal{D}$ s'appelle **la tangente au graphe** de f en le point d'abscisse x_0. Son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

D'après la proposition 1, il existe une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, et telle que pour tout $x \in I$, on puisse écrire

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\substack{\text{meilleure approximation} \\ \underline{\text{affine}} \\ \text{de } f \text{ au voisinage de } x_0}} + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

On peut écrire f comme la somme d'une fonction affine et d'une autre fonction, qui, au voisinage de x_0, prend des valeurs plus petites que toute fonction linéaire non nulle. La fonction affine que l'on a choisie est donc, en ce sens, la meilleure façon de faire une approximation de f par une fonction affine. Le graphe de cette fonction affine est la tangente au graphe de f en x_0.

• **Vocabulaire**

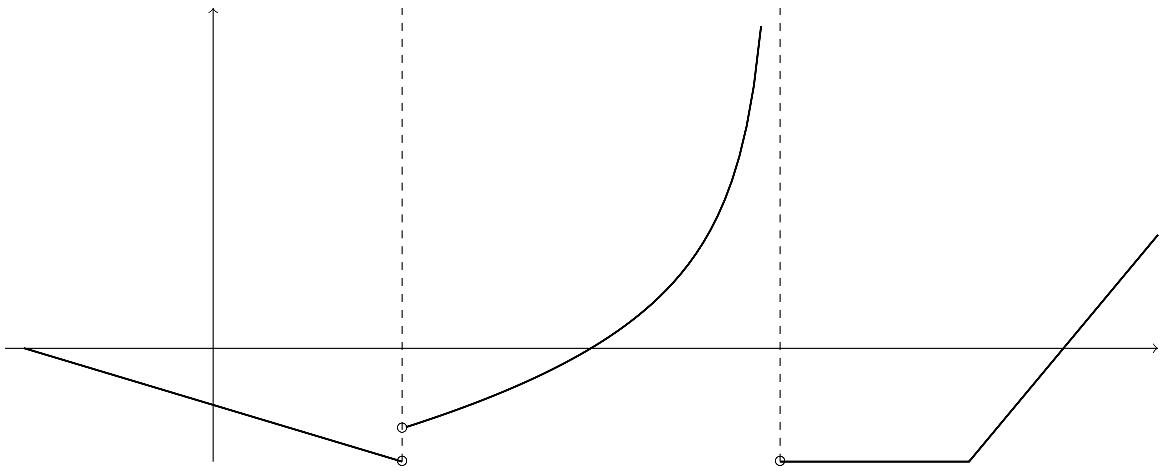
— Si $f'(x_0) = 0$, on parle de tangente **horizontale** au point d'abscisse x_0.

— Si f est seulement dérivable à droite en x_0, la droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ est appelée la **demi-tangente** en x_0. On peut aussi ne considérer que la demi-droite correspondante. Même chose, à gauche, si f n'est dérivable qu'à gauche en x_0.

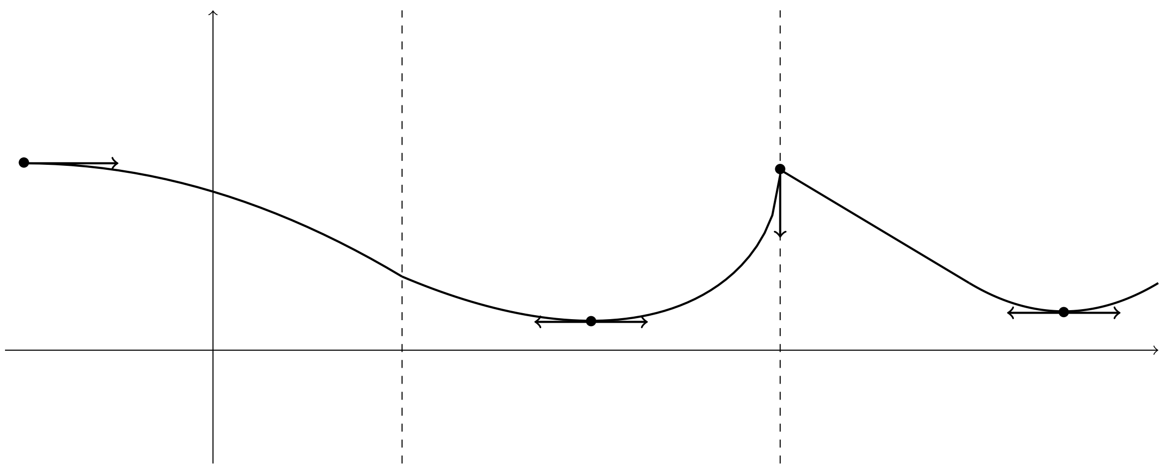
— Si $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$, f n'est pas dérivable en x_0, mais on dit qu'on a une tangente **verticale** au point d'abscisse x_0.
C'est le cas par exemple pour l'application $x \longmapsto \sqrt{|x|}$ en 0.

• **Exemple avec des graphes**. On suppose qu'une application f est définie sur un intervalle, et dérivable en tout point de cet intervalle, sauf un nombre fini, comme indiqué sur le graphe.

Supposons que le graphe de $f' : x \longmapsto f'(x)$ soit celui-ci :



Alors le graphe de f doit avoir l'allure suivante (en supposant f continue), à une constante près :



1.3 Opérations sur la dérivée en un point

Proposition 5.

Soit $x_0 \in I$. Soient $f, g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors :

1. $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0, et $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0, et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, et $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0, avec
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
Ainsi : $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0, avec $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Exemple 1

1. Toute application constante est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, de dérivée nulle.
2. L'application $x \longmapsto x$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, de dérivée $x \longmapsto 1$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto x^n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.
4. Toute application polynomiale est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
5. Toute application rationnelle (rapport de deux fonctions polynomiales) est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

Proposition 6 (dérivée d'un produit)**.**

Soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
On suppose que $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en x_0.
Alors le produit $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ est dérivable en x_0, et $(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} f_j(x_0) \right) f_i'(x_0)$.

- **Remarque**. Avec les mêmes notations, si $n = 3$, on obtient :

$$(f_1 f_2 f_3)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0)f_3(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)f_3(x_0) + f_1(x_0)f_2(x_0)f_3'(x_0).$$

Écrire le cas $n = 4$.

Corollaire 7.

Soit $x_0 \in I$. Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que f est dérivable en x_0. Alors f^n est dérivable en x_0, et $(f^n)'(x_0) = nf'(x_0)f^{n-1}(x_0)$.

Exemple 2

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x^3 + 5x - 1)\cos(x)e^x$. L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f'(x)$.

2. Soit $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ g(x) = (\tan x)^5$. L'application g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donner, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'expression de $g'(x)$.

Proposition 8.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $g \in \mathcal{A}(J, \mathbb{R})$. On suppose que $f(I) \subset J$.
Soit $x_0 \in I$, et soit $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0, et que g est dérivable en y_0.
Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'\big(f(x_0)\big)$.

Exemple 3

Préciser l'expression des dérivées dans les cas suivants.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(e^x\right) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos\left(t^9\right) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \tan\left(\dfrac{e^y}{e^{2y}+1}\right) \end{array}$$

1.4 Fonctions dérivables sur un intervalle

Définition 9.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I.
On peut alors définir l'application $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$. On l'appelle la dérivée de f, et on la note f'.
Si de plus l'application f' est continue sur I, on dit que f est **de classe** C^1 sur I.

• **Notations.** On note $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables sur I.
On note $C^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^1 sur I.

• **Remarques**

1. Toute application de classe C^1 est dérivable : $C^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.
2. Avec les opérations sur les dérivées montrées au paragraphe précédent, il est immédiat de vérifier que $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On peut aussi vérifier que $C^1(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Exemple 4

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{l} x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}.$$

Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

• On a vu une proposition sur les opérations sur les dérivées en un point. Si les fonctions considérées sont dérivables sur un intervalle, on obtient la proposition suivante.

Proposition 10.

Soient u et v deux applications de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que u et v sont dérivables sur I. On dispose alors des propriétés suivantes.

1. Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda u+\mu v$ est dérivable sur I, et $(\lambda u+\mu v)'=\lambda u'+\mu v'$.
2. L'application uv est dérivable sur I, et $(uv)'=u'v+uv'$.
3. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ est définie et dérivable sur I, et $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$.

   On en déduit que $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, et que $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Proposition 11.

Soit $f\in\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g\in\mathcal{A}(J,\mathbb{R})$. On suppose que $f(I)\subset J$, de sorte que la composée $g\circ f$ soit définie.
On suppose de plus que f est dérivable sur I, et que g est dérivable sur J.
Alors la composée $g\circ f$ est dérivable sur I, et

$$\big(g\circ f\big)'=f'\cdot(g'\circ f).$$

- Voyons maintenant d'autres propriétés que l'on peut énoncer quand une fonction est dérivable sur un intervalle.

Proposition 12.

Soit $f\in\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable sur I.

1. Si f est constante, alors $f'=0$.
2. Si f est croissante, alors $f'\geq 0$.
3. Si f est décroissante, alors $f'\leq 0$.

Proposition 13.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f\in\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. On suppose que $f(I)=J$, que f est continue, et que f est strictement monotone. On sait qu'alors $f:I\longrightarrow J$ est bijective, et que $f^{-1}:J\longrightarrow I$ est continue.

Si f est dérivable sur I et si : $\forall x\in I,\ f'(x)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J, et

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}.$$

Exemple 5

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x^3$. Alors f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque f^{-1} est l'application racine cubique, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
Avec la proposition précédente, on sait même que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Elle n'est cependant pas dérivable en 0 (son graphe admet une tangente verticale en ce point).

1.5 Dérivées usuelles

- Toute fonction constante est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.

- Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^{n-1} \end{array}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

(f est une application polynomiale). Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

- L'application ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

- L'application exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \end{array}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$.

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$ est dérivable, de dérivée $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(a) a^x \end{array}$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array}$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

- L'application sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée l'application cosinus.

- L'application cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$.

- Posons $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. L'application tangente est dérivable sur D, et :

$$\forall x \in D,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Définition-Proposition 14.

L'application tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
On note Arctan (« arctangente ») sa bijection réciproque. C'est une application définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est de plus strictement croissante, et continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Puisque : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$, l'application Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

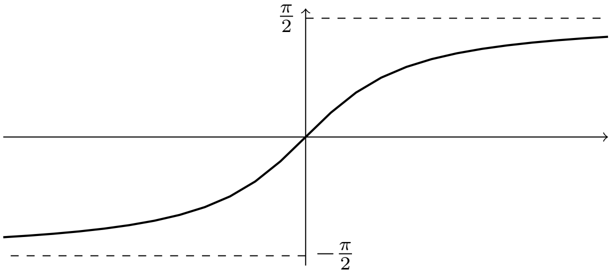
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On peut également vérifier que $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Le fait que Arctan soit dérivable résulte de la proposition du paragraphe précédent sur la dérivabilité de la bijection réciproque. Avec cette même proposition, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\mathrm{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Graphe de Arctan



Remarque. Si $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}\, x$ est égal à un angle θ tel que $\tan\theta = x$. Plus précisément, c'est l'unique angle θ dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan\theta = x$. Par exemple

$$\mathrm{Arctan}(0) = 0, \quad \mathrm{Arctan}(\tan\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{Arctan}\left(\tan(\frac{\pi}{3}+\pi)\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{Arctan}(\tan\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}.$$

De manière générale, on peut seulement dire que pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$,

$$\mathrm{Arctan}(\tan\theta) = \theta\ [\pi].$$

Si l'on connaît de plus l'entier k tel que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, alors on peut écrire $\mathrm{Arctan}(\tan\theta) = \theta - k\pi$.
En revanche, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\mathrm{Arctan}\, x) = x$.

2 Propriétés globales des fonctions dérivables

2.1 Points critiques

Proposition 15.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit c un point de I qui ne soit pas une borne de I (c doit être « à l'intérieur » de I).
On suppose que f admet un extremum local en c, et que f est dérivable en c.
Alors $f'(c) = 0$.

- **Remarque.** Si c est une borne de I, il y a des contre-exemples.

Définition 16.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable sur I.
Soit $x \in I$. On dit que x est un **point critique** de f si $f'(x) = 0$.

Remarque. Supposons f dérivable sur I, et soit x_0 un point situé « à l'intérieur » de I. Si f présente un extremum local en x_0, alors x_0 est un point critique de f. La réciproque est fausse.
Quand on cherche les extrema d'une fonction dérivable, on commence par chercher ses points critiques, puis il faut vérifier, pour chacun des points que l'on trouve, s'il s'agit ou non d'un extremum. Il reste encore à examiner à part les bornes de l'intervalle (si la fonction est définie en ces points).

Théorème 17 (Théorème de Rolle).

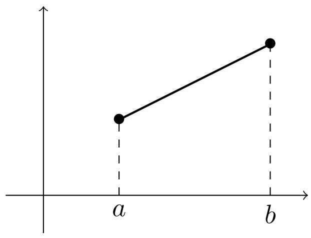
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{A}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant

1. f est continue sur $[a,b]$
2. f est dérivable sur $]a,b[$
3. $f(a) = f(b)$.

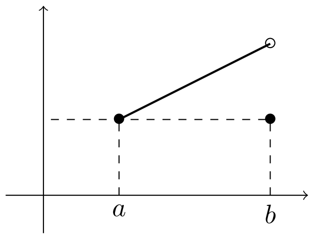
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

- **Remarques**

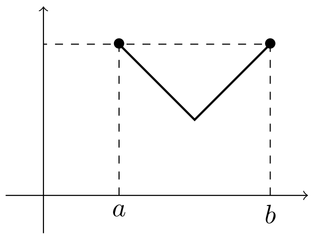
1. Si l'on ne suppose que 1 et 2, il y a des contre-exemples :



2. Si l'on ne suppose que 2 et 3, également :



3. Si l'on ne suppose que 1 et 3, également :



- **Exercice.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{A}([a,b],\mathbb{R})$.

On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et que f s'annule en n points de $[a,b]$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$). Montrer que f' s'annule en (au moins) $n-1$ points.

2.2 Théorèmes des accroissements finis

2.2.1 Égalité des accroissements finis et applications

Théorème 18 (Égalité des accroissements finis).

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{A}([a,b],\mathbb{R})$.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Proposition 19.

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes

1. $f' = 0 \iff f$ est constante.
2. $f' \geq 0 \iff f$ est croissante.
3. $f' \leq 0 \iff f$ est décroissante.

Corollaire 20.

Soit f une application dérivable sur l'intervalle I.
On suppose que $f' \geq 0$ sur I, et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points.
Alors f est strictement croissante.

- **Exemple**. Considérer l'application $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 21 (Théorème de la limite de la dérivée)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, dérivable sur $I \backslash \{a\}$. Si $f' : I \backslash \{a\}$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) quand x tend vers x, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

En particulier si ℓ est finie, f est dérivable en a et f' est continue en a donc $f'(a) = \ell$.

2.2.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 22 (Inégalité des accroissements finis)**.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{A}([a, b], \mathbb{R})$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m \leq f' \leq M$ sur $]a, b[$ (c'est à dire : $\forall x \in]a, b[, \ m \leq f'(x) \leq M$).
<u>Alors</u> $\quad m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Corollaire 23.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable sur l'intervalle I et qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m \leq f' \leq M$ sur I.
<u>Alors</u> pour tout $(a, b) \in I^2$ <u>tel que $a \leq b$</u>, on a

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Définition 24.

Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. S'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(a,b) \in I^2$, on a

$$|f(b)-f(a)| \leq K|b-a|.$$

Alors on dira que f est K-lipschitzienne.

Corollaire 25.

Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable sur I et qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq K$ sur I (c'est à dire : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq K$).
Alors f est K-lipschitzienne.

Exemple 6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. On pose
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x) - x \end{array}.$$
Vérifier que f est croissante. Étudier le signe de g.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2}-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_{n+1}-u_n|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+p}-u_n| \leq 2|u_{n+1}-u_n|$, puis que
$$|u_{n+p}-u_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|u_1-u_0|.$$
6. Dans la relation précédente, passer à la limite quand $p \to \infty$, à n fixé, pour déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Correction

1. La fonction Arctan est dérivable sur sur ensemble de défintion et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(\operatorname{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
Qui est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction Arctan est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\frac{1}{2}$ étant positif, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'application g est dérivlable car c'est une somme d'applications dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$g'(x) = -\frac{1+2x^2}{1+x^2}$$
Qui est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus la limite quand x tend vers $+\infty$ de $g(x)$ est égale à $-\infty$ et la limite en $-\infty$ est égale à $+\infty$. On a de plus, $g(0) = 0$.
L'application g est donc positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
Pour l'initialisation il faut calculer u_1.
$$u_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{8}$$
et comme $\pi \leq 3$, $u_1 \leq \dfrac{3}{8} \leq u_0$.
Pour l'hérédité, il faut utiliser la croissance de la fonction f.

3. Comme elle est décroissante, pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il suffit de montrer qu'elle est minorée. On montre par récurrence qu'elle est minorée par 0. Pour l'hérédité, on utilise f croissante et $f(0)=0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite l. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et comme f est continue la limite l vérifie l'égalité :
$$l = f(l) \Longleftrightarrow g(l) = 0$$
Or nous avons vu que g ne s'annule qu'en 0. D'où $l=0$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis.
Nous avons vu que la dérivée de f est l'application $x\mapsto \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$. Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\begin{array}{rrcl} & x^2 & \geq & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2+1 & \geq & 1 \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{x^2+1} & \leq & 1 \\ \Longleftrightarrow & f'(x) & \leq & \dfrac{1}{2} \end{array}$$
De plus $f'(x)$ est positif pour tout $x\in\mathbb{R}$. D'où, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$
Par ailleurs f est bien continue sur $[u_{n+1}, u_n]$ et dérivable sur $]u_{n+1}, u_n[$.
Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :
$$|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1}-u_n| \Longleftrightarrow \quad |u_{n+2}-u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1}-u_n|$$
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour démontrer la première inégalité, nous allons faire une récurrence sur p. On note $A(p)$ l'assertion :
$$|u_{n+p}-u_n| \leq 2|u_{n+1}-u_n|$$
Pour $p=1$ l'inégalité est vérifier car $1\leq 2$ et $|u_{n+1}-u_n|>0$.
Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Supposons $A(p)$ vraie et montrons $A(p+1)$.
D'après l'inégalité triangulaire on a :
$$|u_{n+p+1}-u_n| = |u_{n+p+1}-u_{n+1}+u_{n+1}-u_n| \leq |u_{n+p+1}-u_{n+1}| + |u_{n+1}-u_n|$$
En remarquant que $|u_{n+p+1}-u_{n+1}| = |f(u_{n+p})-f(u_n)|$ et en utilisant à nouveau l'inégalité des accroissements finis, on obtient l'inégalité :
$$|u_{n+p+1}-u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+p}-u_n|$$
Or comme $A(p)$ est supposée vraie on a :
$$\frac{1}{2}|u_{n+p}-u_n| \leq |u_{n+1}-u_n|$$
Ainsi, on a l'inégalité :
$$|u_{n+p+1}-u_n| \leq |u_{n+p+1}-u_{n+1}| + |u_{n+1}-u_n| \leq 2|u_{n+1}-u_n|$$
L'assertion $A(p)$ implique donc bien $A(p+1)$.
D'après le principe de récurrence $A(p)$ est donc vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.
Pour montrer la deuxième inégalité nous allons montrer, par récurrence sur n, que l'assertion $B(n)$ suivante est vraie :
$$|u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_1-u_0|$$
L'assertion $B(0)$ est vraie.
Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $B(n)$ vraie et montrons que $B(n+1)$ est vraie.
D'après la question 4 on a :
$$|u_{n+2}-u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1}-u_n|$$
Mais comme on a supposé $B(n)$ vraie on a :
$$|u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_1-u_0|$$

D'où :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_1 - u_0|$$

On a bien démontré que $B(n)$ impliquait $B(n+1)$.
Le principe de récurrence permet alors de déduire que $B(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Quand p tend vers l'infini on a montré que u_{n+p} tendait vers 0, ainsi $|u_{n+p} - u_n|$ tend vers $|u_n|$.
D'autre part, $|u_1 - u_0| \leq 1$, d'où le résultat.

3 Dérivées successives

Définition 26.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

— Si f est dérivable sur I, on dit que f est une fois dérivable sur I, et on note $f^{(1)} = f'$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir défini la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I, notée $f^{(n)}$. Si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, on dit que f est $(n+1)$ fois dérivable, et on note $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$, la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de f.

• **Notations.** $f^{(1)} = f'$, $\quad f^{(2)} = f''$, $\quad f^{(3)} = f'''$, et par convention, $f^{(0)} = f$.
L'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I est parfois noté $D^n(I, \mathbb{R})$. On dit aussi d'une fonction n fois dérivable qu'elle est de classe D^n.

Exemple 7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application exp est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp^{(n)}(x) = \exp(x)$.
2. Si $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale non nulle, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
En notant $d = \deg(P)$, on a : $P^{(d)}$ est une constante. Que vaut cette constante ?
Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq d+1$, on a $P^{(n)} = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application sin est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ (exercice).
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application cos est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ (exercice).

Définition 27.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que f est n fois dérivable en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que f soit $n-1$ fois dérivable sur $J \cap I$, et tel que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en x_0.

Définition 28.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est **de classe** C^n sur I si f est n fois dérivable sur I, <u>et</u> $f^{(n)}$ est continue sur I.

• **Vocabulaire**

— Si f est de classe C^1, on dit aussi qu'elle est continûment dérivable.

— On peut, par extension, dire d'une fonction continue qu'elle est de classe C^0.

- **Notation.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^n.

- **Remarque.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C^n(I, \mathbb{R}) \subset D^n(I, \mathbb{R}) \subset C^{n-1}(I, \mathbb{R})$.

Exemple 8

Soit

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{l} x^3 \sin(\dfrac{1}{x}) \text{ si } \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}.$$

Alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée d'applications dérivables et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Notons que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ ainsi f est continue en 0. Or

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc d'après le théorème de la limite de la dérivée la fonction f est dérivable en 0. Et on a, pour tout $x \in R$

$$f' : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{l} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. En effet sur $\mathbb{R}^*$ elle c'est une somme de produits de fonctions composés continues et en 0 nous avons vu que la limite de la dérivée était bien égale à la dérivée en 0.
Par contre f' n'est pas dérivable en 0. En effet soit $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui n'admet pas de limite en 0 (prendre les suites $\left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{2\pi n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Définition 29.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est **de classe** C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^∞ sur I.

- **Remarques**
  1. $C^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I, \mathbb{R})$.
  2. f est de classe C^∞ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

- **Exemples.** Les applications exp, cos et sin sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

L'application inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (exercice).

Proposition 30.

Soient $f, g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n sur I).
Alors $f+g$ et λf sont n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n sur I), et

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \quad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Exemple 9

Les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 31 (Formule de Leibniz)**.**

Soient $f, g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n sur I).
Alors fg est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I), et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- **Remarque.** La formule de Leibniz est encore valable pour $n = 0$.

Proposition 32.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $g \in \mathcal{A}(J, \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $f(I) \subset J$, de sorte que la composée $g \circ f$ soit définie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I) et que g est n fois dérivable sur J (resp. de classe C^n sur J).
Alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I).

Corollaire 33.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que f est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I), et que : $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
Alors $\dfrac{1}{f}$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I).

Démonstration. L'application inverse $y \longmapsto \dfrac{1}{y}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit de composer f avec l'application inverse pour obtenir le résultat.

- **Remarque.** La somme, le produit, ou la composée d'applications de classe C^∞ est de classe C^∞.

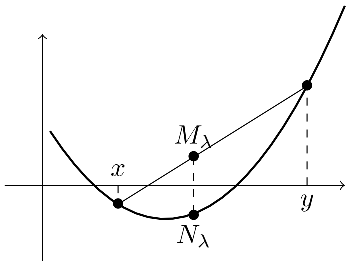
- **Exemple.** Les fonctions rationnelles sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.

4 Fonctions convexes

Définition 34.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est **convexe** si

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$



$$M_\lambda \begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)y \\ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{pmatrix}$$

$$N_\lambda \begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda y) \\ f(\lambda x + (1-\lambda)y \end{pmatrix}$$

• **Remarque**. La définition peut se reformuler ainsi : f est convexe si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in I$, et tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in [0,1]^2$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a $f\big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\big) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

Proposition 35 (: inégalité de Jensen)**.**

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est convexe. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a

$$f\big(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\big) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Proposition 36.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ une application convexe. Soit $a \in I$. Notons

$$\begin{array}{rccc} \Delta_a : & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}.$$

<u>Alors</u> Δ_a est croissante.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ une application et soit $a \in I$ notons Δ_a l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Delta_a : & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}.$$

• Montrons que si f est convexe alors Δ_a est croissante.
Supposons donc f convexe.
Soient x et y deux éléments de $I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$.
Il y a trois situations différentes, soit $a < x < y$, soit $x < a < y$ et enfin $x < y < a$. Nous traiterons la première, les deux autres se démontrent de manière analogue.
Supposons donc que $a < x < y$.
En posant $\lambda = \dfrac{x-y}{a-y}$ on a, d'une part $\lambda \in [0,1]$ et $x = \lambda a + (1-\lambda)y$. Ainsi, comme f est convexe on a l'inégalité :

$$f(x) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(y)$$

d'où en ajoutant $-f(a)$ aux deux membres de l'inégalité on a

$$f(x) - f(a) \leq -(1-\lambda) f(a) + (1-\lambda) f(y)$$

Et comme $x-a>0$ et $y-a>0$ on en déduit :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{(1-\lambda)(y-a)}{x-a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

Or on a l'égalité

$$\frac{(1-\lambda)(y-a)}{x-a} = \frac{\lambda a+(1-\lambda)y-a}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1$$

On en déduit

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \iff \Delta_a(x) \leq \Delta_a(y)$$

La fonction Δ_a est donc croissante.

• Réciproquement supposons que pour tout $a \in I$ l'application Δ_a est croissante. Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x<y$ et soit $\lambda \in [0,1]$, on veut montrer que

$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Si $\lambda=0$ ou $\lambda=1$ l'inégalité est vérifiée, on peut donc supposer que $\lambda \in]0,1[$.
Posons $a=\lambda x+(1-\lambda)y\big)$ on a alors $\lambda = \dfrac{a-y}{x-y}$ et $x<a<y$
Comme l'application Δ_y est croissante on a :

$$\Delta_y(x) \leq \Delta_y(a) \quad \iff \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(a)-f(y)}{a-y}$$

Or $x-y<0$ on a donc l'inégalité :

$$f(a)-f(y) \leq \frac{a-y}{x-y}(f(x)-f(y))$$

et donc comme $\lambda = \dfrac{a-y}{x-y}$ on a donc l'inégalité :

$$f(a) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

L'application f est donc convexe. ■

Proposition 37.

Soit $f \in D^1(I,\mathbb{R})$. On a l'équivalence : f est convexe **si et seulement si** f' est croissante.

Démonstration : Soit $f \in D^1(I,\mathbb{R})$.
• Supposons que f est convexe et montrons que sa dérivée est croissante.
Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x<y$ montrons que $f'(x) \leq f'(y)$. Pour cela nous revenons au taux d'accroissement en x et en y.
Soit $t \in]x,y[$, c'est à dire $x<t<y$.
Comme f est convexe d'après la proposition précédente les applications Δ_x et Δ_y sont croissantes. Ainsi on a les inégalités

$$\Delta_x(t) \leq \Delta_x(y) \text{ et } \Delta_y(x) \leq \Delta_y(t)$$

Mais notons que $\Delta_x(y)=\Delta_y(x)$ on obtient ainsi, pour tout $t \in]x,y[$:

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(t)-f(y)}{t-y}$$

Ainsi on a, par passage à la limite à droite pour la première expression et à gauche pour la deuxième.

$$\lim_{t\to x^+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \lim_{t\to y^-}\frac{f(t)-f(y)}{t-y}$$

Mais comme f est dérivable en x et en y les limites en x et en y du taux d'accroissement en x et en y existent et sont égales à leur limite à gauche et à droite on a ainsi :

$$f'(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)$$

Et donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 \quad x<y \Rightarrow f'(x) \leq f'(y)}$$

Ainsi si f est convexe la fonction f' est bien croissante.

• Réciproquement supposons f' croissante et montrons que f est convexe.
Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ nous devons montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Pour cela on introduit une fonction auxiliaire g :

$$g : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b) \end{array}$$

Il nous faut montrer que, pour tout $\lambda \in [0,1]$ $g(\lambda)$ est positif.
Notons tout d'abord que $g(0) = g(1) = 0$.
Nous allons maintenant étudier la fonction g (*C'est bien sûr un moyen d'utiliser l'hypothèse*).
La fonction g est dérivable comme composée et somme d'applications dérivables et on a :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad g'(\lambda) = f(a) - f(b) - (a-b)f'(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

L'application g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur l'intervalle $[0,1]$ ainsi il existe $\lambda_0 \in [0,1]$ tel que $g'(\lambda_0) = 0$.
Or l'application $\lambda \mapsto a\lambda - (1-\lambda)b$ est décroissante sur $[0,1]$. En effet elle est dérivable et sa dérivée vaut $a - b < 0$ sur $[0,1]$ ainsi comme $-(a-b) > 0$ et que f' est croissante, g' est décroissante sur $[0,1]$. On a ainsi le tableau de variations :

x	0		λ_0		1
g'			$\searrow$		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

La fonction g est donc bien positive pour tout $\lambda \in [0,1]$, ainsi on a

$$\boxed{\forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)}$$

■

Corollaire 38.

Soit $f \in D^2(I,\mathbb{R})$. On a l'équivalence :
f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Démonstration. La dérivée de f est croissante si et seulement si $(f')' = f''$ est positive ou nulle, et d'après la proposition précédente, f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

Proposition 39.

Soit $f \in D^1(I,\mathbb{R})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1. f est convexe.
2. Le graphe C_f de f est au dessus de chacune de ses tangentes, c'est à dire : pour tout $a \in I$, et tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Démonstration : Soit $f \in D^1(I,\mathbb{R})$.
• Supposons f convexe.
Soit $(x,a) \in I^2$. Notons que si $x = a$ l'inégalité est toujours vraie. On peut donc supposer que $x \neq a$.
D'après l'inégalité des accroissement finis il existe un réel c entre x et a tel que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$$

D'après la proposition 37 comme la fonction f est convexe alors f' est croissante. On a alors deux cas

— $x < c < a$. Dans ce cas on a $x - a < 0$ et $f'(c) \leq f'(a)$. On otient donc :

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a)$$

— $a < c < x$. Dans ce cas on a $x - a > 0$ et $f'(c) \geq f'(a)$ on a donc :

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a)$$

Ainsi on a bien pour tout $(a,x) \in I^2$

$$\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)}$$

• Réciproquement, supposons que pour tout $(a,x) \in I^2$ on ait

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

et montrons que f est convexe.
D'après la proposition 37 il suffit de montrer que sa dérivée est croissante. Soit donc $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ d'après l'hypothèse on a les deux inégalités suivantes :

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y)$$
$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x)$$

Ainsi en additionnant ces deux inégalités on a :

$$0 \geq (y-x)\Big(f'(y) - f'(x)\Big)$$

Mais comme on a supposé que $x < y$ alors $y - x > 0$ on obtient donc que

$$f'(x) \leq f'(y)$$

La fonction dérivée f' est donc bien croissante ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe.}}$$

■

Définition 40.

Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est **concave** si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

(f est concave si et seulement si $-f$ est convexe).

Définition 41.

Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. Soit x_0 un point de I qui ne soit pas une borne de I.
On dit que f présente un **point d'inflexion** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que f soit convexe sur $J \cap]-\infty, x_0]$ puis concave sur $J \cap [x_0, +\infty[$, ou l'inverse (i.e. : f concave sur $J \cap]-\infty, x_0]$ puis convexe sur $J \cap [x_0, +\infty[$).

Proposition 42.

Soit $f \in D^2(I,\mathbb{R})$. Soit x_0 un point de I qui ne soit pas une borne de I.
Si $f''(x_0) = 0$ et f'' « change de signe » en x_0 (c'est à dire : il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que $f'' > 0$ sur $J \cap]-\infty, x_0[$ et $f'' < 0$ sur $J \cap]x_0, +\infty[$, ou l'inverse), alors f présente un point d'inflexion en x_0.

Exemple 10

1. L'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave.

2. L'application $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est ni concave, ni convexe.
   Mais sin est convexe sur tous les intervalles $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et sin est concave sur tous les intervalles $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Les points $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sont des points d'inflexion de sin.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$.
   Étudier la convexité de f suivant les valeurs de a.

4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x(x+1)(x-1)$.
   Alors f est concave sur $]-\infty, 0]$, et convexe sur $[0, +\infty[$.

5 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

On rappelle d'abord la définition de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction complexe.

Définition 43.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes. On définit les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ comme suit :

$$\mathrm{Re}(f) \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \right. \qquad \mathrm{Im}(f) \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array} \right.$$

Définition 44.

- On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en $a \in I$ si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite que x tend vers a. On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point de f.

Proposition 45.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a, et on a alors :

$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\,\mathrm{Im}(f)'(a).$$

Proposition 46.

Soit $\phi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Alors la fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ et définie sur I par

$$f(t) = e^{\phi(t)}$$

est dérivable et on a :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \phi'(t)e^{\phi(t)}$$

Proposition 47 (Inégalité des accroissements finis).

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que f' est bornée par $M \geq 0$ sur $]a, b[$. Alors on a l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Proposition 48.

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est constante si et seulement si elle est dérivable et de dérivée nulle.