Lycée Condorcet
PCSI

Janvier 2025

# Systèmes linéaires

## Table des matières

# 1 Introduction

On trouve la résolution de systèmes linéaires particuliers dans des textes très anciens, commes des tablettes babyloniennes vieilles de quatre millénaires, dans lesquelles les inconnues représentent souvent des surfaces (de champs de blé par exemple) ou des volumes (production d'un champ).

Voici un exemple un peu plus récent traité par le mathématicien grec Diophante d'Alexandrie au III$^{e}$ siècle de notre ère :

*Trouver trois nombres qui, pris deux à deux, forment des nombres proposés. Il faut toutefois que la moitié de la somme des nombres proposés soit plus grande que chacun de ces nombres. Proposons donc que le premier nombre, augmenté du second, forme* 20 *unités ; que le second, augmenté du troisième, forme* 30 *unités, et que le troisième, augmenté du premier forme* 40 *unités.*

Avec le formalisme actuel on pourrait traduire la première phrase de ce texte par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ y+z & = & b \\ x+z & = & c \end{array}\right.$$

Où $x$, $y$, et $z$ sont les trois nombres cherchés, les inconnues, et $a$ $b$ et $c$ les nombres "proposés". La deuxième phrase se traduirait par :

$$\frac{a+b+c}{2} \geq x, \quad \frac{a+b+c}{2} \geq y, \quad \frac{a+b+c}{2} \geq z$$

Enfin la troisième phrase peut se traduire par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 20 \\ y+z & = & 30 \\ x+z & = & 50 \end{array}\right.$$

Diophante propose ensuite une résolution de ce système. La méthode proposée n'est pas généralisable à tous les systèmes linéaires même à deux ou trois inconnues.

En occident la première méthode systèmatique de résolution des systèmes linéaires $2 \times 2$ et $3 \times 3$ a être proposée est probablement la méthode par substitution. On la trouve notamment employée par le mathématicien écossais Colin Maclaurin dans son *Treatise of Algebra*, publié de manière posthume en 1748.
Mais pour trouver une méthode généralisable à tous les systèmes linéaires, il faut attendre Carl Friedrich Gauss (encore lui !). Dans *De Elementis Ellipticis Palladis* (rédigé entre 1803 et 1809) il l'utilise pour résoudre un système linéaire intervenant dans son étude de l'orbite de Pallas, un des plus grands astéroïdes de la ceinture d'astéroïdes située entre les orbites de Mars et de Jupiter.

Néanmoins on trouve ce principe de très nombreux siècles auparavant dans les mathématiques chinoises. Liu Hui commentateur du III$^{e}$ siècle de notre ère du traité *Les Neufs Chapitres sur l'art mathématiques* (livre anonyme chinois de mathématiques, compilé entre le II$^{e}$ siècle avant note ère et le Ier siècle de notre ère) met en oeuvre à plusieurs reprises cette fameuse méthode. Il attribue d'ailleurs la paternité de cette méthode à Chang Tsang, chancelier de l'empreur de Chine au II$^{e}$ siècle avant notre ère !

## 2 Définitions

### 2.1 Systèmes linéaires et matrice associée

Avant de donner une définition formelle, voici trois exemples de systèmes linéaires.

**Exemple 1**

1. $\begin{cases} 2x+y &= 2 \quad (L_1) \\ x+3y &= 4 \quad (L_2) \end{cases}$ est un système linéaire à deux équations $(L_1)$ et $(L_2)$ et deux inconnues $x$ et $y$. Comme il y a autant d'équations que d'inconnues, on parle de système carré d'ordre 2.
2. $\begin{cases} x+y+z &= 6 \quad (L_1) \\ -x+3y-z &= 3 \quad (L_2) \end{cases}$ est un système linéaire à deux équations et trois inconnues.
3. $\begin{cases} x+y &= 6 \quad (L_1) \\ -x+3y &= 3 \quad (L_2) \\ 2x+1 &= 2 \quad (L_3) \end{cases}$ est un système linéaire a tois équations et deux inconnues.

**Définition 1.**

- On appelle **équation linéaire** une équation en un nombre fini d'inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de la forme :

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha$$

où les $a_i$ et $\alpha$ sont des éléments d'un ensemble (dans ce cours se sera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$).

- Un **système linéaire** est la donnée d'un nombre fini d'équations linéaires. Autrement dit, si $n$ et $p$ sont deux entiers non nuls, un système linéaire $(S)$ de taille $n \times p$ est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_1 \quad (L_1) \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p &= b_2 \quad (L_2) \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p &= b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

où les $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ sont des réels ou des complexes appelés coefficients du système, les $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont aussi des complexes ou réels appelés le second membre et $x_1, \ldots, x_p$ sont les inconnues du système.

- Lorsque tous les termes du second membre sont nuls, on dit que le système $(S)$ est **homogène**. Dans le cas général, on appelle **système homogène associé à** $(S)$ le système $(S_0)$ obtenu en remplaçant le second memebre $(b_1, \cdots, b_n)$ par le $n$-uplet nul.

**Définition 2.**

Soit $(S)$ le système linéaire $n \times p$ :

$$\left\{\begin{array}{lcll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

à coefficients réels ou complexes. On appelle **matrice associée à** $(S)$ la matrice de taille $n \times p$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On appelle **matrice augmentée associée à** $(S)$, et on note $(A \mid B)$ la matrice où on a ajouté la dernière colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ des seconds membres :

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

**Exemple 2**

Le sytème $(S)$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - y + 2z & = & 2 \\ -x + 8y + z & = & 3 \end{array}\right.$$

a pour matrice associée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour matrice augmentée $(A|B)$ :

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 8 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

**• Remarque**

Dans ce chapitre nous ne verrons la matrice et la matrice augmentée associée à un système linéaire que comme une simplification d'écriture (comme ce le fût historiquement). Mais au chapitre prochain nous verrons quel type d'opérations sur les matrices correspond au opérations que nous ferons sur les systèmes linéaires. Nous verrons aussi les définitions correspondantes "dans le monde des matrices" à celles que nous voyons ici sur les systèmes linéaires.

## 2.2 Solutions d'un système linéaire

**Définition 3.**

- Si $(S)$ est un système de $n$ équations à $p$ inconnues (on dira un système $n \times p$), résoudre $(S)$ c'est trouver tous les $p$-uplets de réels ou de complexes vérifiant **simultanément** les $n$ équations $(L_1), \ldots, (L_n)$.
- Si le système admet au moins une solution, il est dit **compatible**.
- Si le système n'admet pas de solutions, il est dit **incompatible**.

**Remarque :**
Un système $n \times p$ linéaire homogène est toujours compatible. En effet le $p$-uplet $(0, \cdots, 0)$ est, dans ce cas, toujours solution.

**Exemple 3**

- Le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 0 \\ x-y & = & 2 \end{array}\right.$$
est compatible, il admet une unique solution $(1, -1)$.
- Alors que le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 0 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$$
est incompatible.

**Interprétation géométrique**
On connaît très bien les solutions de systèmes linéaires simples.

- L'ensemble des solutions de l'équation
$$ax + by = c$$
avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite affine de $\mathbb{R}^2$ ayant pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- L'ensemble des solutions de l'équation
$$ax + by + cz = d,$$
avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est un plan affine de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- Un système linéaire $2 \times 3$ (deux équations trois inconnues)
$$\left\{\begin{array}{c} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array}\right.$$
(avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ ) peut s'interpréter géométriquement comme l'intersection de deux plans dans l'espace. L'ensemble des solutions de ce système est alors soit vide (si les deux plans sont parallèles non confondus), soit une droite (si les deux plans sont non parallèles non confondus), soit un plan (si les deux plans sont confondus).

**Proposition 4.**

Soit $(S)$ un système homogène $n \times p$. On a :

1. Le $p$-uplet $(0, \cdots, 0)$ est solution de $(S)$.
2. Si $x = (x_1, \cdots, x_p)$ et $y = (y_1, \cdots, y_p)$ sont des solutions de $(S)$ alors $x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_p + y_p)$ est une solution de $(S)$.
3. Si $x = (x_1, \cdots, x_p)$ est une solution de $(S)$ et $\lambda$ un scalaire alors $\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$ est une solution de $(S)$.

**Remarque**
En cumulant les points 1 et 2 de la propostion 4 on obtient que $(S)$ est stable par combinaisons linéaires.

**Démonstration :** Soit $(S)$ le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1p}x_p & = & 0 & (L_1)\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2p}x_p & = & 0 & (L_2)\\ & \vdots & & \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{np}x_p & = & 0 & (L_n)\end{array}\right.$$

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a
$$a_{i1}0+\cdots+a_{ip}0=0$$
Le $p$-uplet $(0,\cdots,0)$ est donc bien solution de $(S)$.
2. Soient $x=(x_1,\cdots,x_p)$ et $y=(y_1,\cdots,y_p)$ deux solutions de $(S)$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$, comme $x$ et $y$ sont solutions de $(S)$ on a
$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{ip}x_p=0$$
$$a_{i1}y_1+\cdots+a_{ip}y_p=0$$
En additionnant ces lignes on obtient :
$$a_{i1}(x_1+y_1)+\cdots+a_{ip}(x_p+y_p)=0$$
Ainsi $x+y$ est solution de la ligne $L_i$ et ce pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Le $p$-uplet $x+y$ est donc bien solution de $(S)$.
3. Soient $x=(x_1,\cdots,x_p)$ une solution de $(S)$ et $\lambda$ un scalaire. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a alors
$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{ip}x_p=0$$
En mulpliant cette ligne par $\lambda$ on obtient :
$$a_{i1}\lambda x_1+\cdots+a_{ip}\lambda x_p=0$$
Le $p$-uplet $\lambda x$ est donc bien solution de $(S)$. ■

**Proposition 5.**

Soit $(S)$ un système $n\times p$ ($n$ équations et $p$ inconnues) compatible. Alors toutes solutions de $(S)$ s'écrit comme somme d'une solution particulière de $(S)$ et d'une solution du système homogène associé $(S_0)$. En d'autres termes si $E$ et $E_0$ sont les ensembles des solutions de respectivement $S$ et $S_0$ et si le $p$-uplet $y$ est une solution particulière de $S$ alors on a

$$E=\{y+y_0 \mid y_0 \in E_0\}$$

• **Remarque :**
C'est un résultat très proche de ce qu'on a vu pour les équations différentielles. Mais autant dans le cas des équations différentielles il nous était très utile pour trouver les soltions d'une équation différentielle, autant dans le cadre des systèmes linéaires il ne sera pas très utile. Nous trouverons directement les solutions.

**Démonstration :** Soit $(S)$ un système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1)\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2)\\ & \vdots & & \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{np}x_p & = & b_n & (L_n)\end{array}\right.$$

Suppsons qu'il admet une solution et soit $y=(y_1,\cdots,y_p)$ une solution particulière de $(S)$. On note $E$ l'ensemble des solutions de $(S)$ et $E_0$ l'ensemble des solutions de $(S_0)$. Montrons par double inclusion l'égalité cherchée.
• Montrons l'inclusion $E\subset\{y+y_0 \mid y_0\in E_0\}$.
Soit $x=(x_1,\cdots,x_p)$ un élément de $E$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$, comme $x$ et $y$ sont solutions de $(S)$ on a :

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{ip}x_p=b_i$$
$$a_{i1}y_1+\cdots+a_{ip}y_p=b_i$$

Ainsi en soustrayant ces deux lignes on obtient :

$$a_{i1}(x_1-y_1)+\cdots+a_{ip}(x_p-y_p)=0$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ alors le $p$-uplet $x - y$ est solution du système homogène $(S_0)$. Ainsi il exsite $y_0 \in E_0$ telle que

$$x - y = y_0 \Longleftrightarrow x = y + y_0$$

La solution $x$ est bien un élément de l'ensemble $\{y + y_0 \mid y_0 \in E_0\}$ et donc

$$\boxed{E \subset \{y + y_0 \mid y_0 \in E_0\}}$$

• Montrons maintenant l'inclusion réciproque.
Soit $z_0 = (z_1, \cdots, z_p) \in E_0$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Comme le $p$-uplets $y$ est solution de $(S)$ et comme $z_0$ est solution de $(S_0)$ on a

$$a_{i1}z_1 + \cdots + a_{ip}z_p = 0$$

$$a_{i1}y_1 + \cdots + a_{ip}y_p = b_i$$

Ainsi en additionnant ces deux lignes on obtient :

$$a_{i1}(y_1 + z_1) + \cdots + a_{ip}(y_p + z_p) = b_i$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le $p$-uplet est solution du système $(S)$. On a donc bien l'inclusion :

$$\boxed{\{y + y_0 \mid y_0 \in E_0\} \subset E}$$

• On a donc bien montré par double inclusion l'égalité :

$$\boxed{\{y + y_0 \mid y_0 \in E_0\} = E}$$

■

**Proposition 6.**

Considérons un système linéaire $(S)$ et $(A|B)$ sa matrice augmentée associée. Soit $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et la matrice colonne associée $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$\text{le } p\text{-plet } x \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } AX = B$$

**Démonstration :** Il suffit de faire le produit $AX$ ! ■

# 3 Systèmes échelonnés

## 3.1 Définitions

**Définition 7.**

Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle **pivot** d'une ligne non nulle le premier coefficient non nul.

**Définition 8.**

On dit d'un système linéaire qu'il est **échelonné** si

- les lignes sous une ligne nulle sont toutes nulles
- à chaque ligne (non nulle), le pivot de la ligne se trouve strictement à droite du pivot de la ligne au dessus.

**Exemple 4**

Considérons ces deux systèmes :

$$S_1 = \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{1}x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & \boxed{2}y & + & z & = & 2 \\ & & \boxed{1}y & + & -4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad S_2 = \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{1}x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & \boxed{2}y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & \boxed{3} \end{array}\right.$$

Le système $(S_1)$ n'est pas échelonné alors que le système $(S_2)$ l'est.

**Définition 9.**

Dans un système échelonné, on dit qu'une **inconnue** est **principale** si sur une des lignes du système, son coefficient est un pivot. Elle est dite **secondaire** sinon.

**Exemple 5**

Les trois systèmes linéaires suivants sont échelonnés :

$$S_1 = \left\{\begin{array}{rcl} x+\ y+\ z & = & 6 \\ -y+3z & = & 3 \\ z & = & 2 \end{array}\right. \qquad S_2 = \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6 \\ 3z & = & 3 \\ 0 & = & 2 \end{array}\right. \qquad S_3 = \left\{\begin{array}{rcl} x+\ y+\ z & = & 6 \\ -y+3z & = & 3 \end{array}\right.$$

Dans le système $(S_1)$ les inconnues $x$, $y$ et $z$ sont des inconnues principales.
Dans le système $(S_2)$ $x$ et $z$ sont les inconnues principales et $y$ est une inconnue secondaire.
Enfin dans le système $(S_3)$ les inconnues $x$ et $y$ sont des inconnues princiaples alors que $z$ est une inconnue secondaire.

Un système linéaire échelonné est facile a résoudre.
On le résout par **remontées successives** (c'est-à-dire par substitutions successives depuis la dernière ligne jusqu'à la première ligne). Ce n'est qu'à cette occasion que vous utiliserez la substitution !

**Exemple 6**

Reprenons les exemples précédents de sytèmes :

- Pour $(S_1)$ on a :

$$S_1 = \left\{\begin{array}{rcl} x+\ y+\ z & = & 6 \\ -y+3z & = & 3 \\ z & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+\ y+\ 2 & = & 6 \\ -y+6 & = & 3 \\ z & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+\ 3+\ 2 & = & 6 \\ y & = & 3 \\ z & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

  montées successives. Le système $(S_1)$ admet donc une unique solution $(1, 3, 2)$.

- Le système $(S_2)$ est incompatible, en effet peut importe les inconnues $x$, $y$ et $z$, la dernière égalité ne pourra jamais être vérifiée !

- Pour résoudre le dernier système il va falloir poser une des variables en paramètre. Voir la méthode suivante.

$$S_3 = \left\{\begin{array}{rcl} x+\ y+\ z & = & 6 \\ -y+3z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+\ y & = & 6-z \\ y & = & -3+3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 9-4z \\ y & = & -3+3z \end{array}\right.$$

  Ainsi l'ensemble $E$ des solutions de $(S_3)$ est

$$E = \Big\{(9-4z, -3+3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

**Attention** à ne pas oublié le paramètre $z$ dans le dernier cas !
Dans ces trois exemples il faut bien noter que, comme les systèmes sont à 3 inconnues, l'ensemble des solutions est un ensemble de triplets !

**Méthode** (Représentation paramétrique des solutions).

Lorsqu'un système échelonné a des inconnues secondaires et des solutions, on peut donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions :

- en prenant les inconnues secondaires comme paramètres prenant des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$.
- et en exprimant les inconnues principales en fonction de ces paramètres.

**• Remarque**
Le nombre de paramètres correspond donc au nombre d'inconnues secondaires.

**Proposition 10** (Existence et unicité de solutions pour les systèmes échelonnés).

1. Un système échelonné a une unique solution si et seulement si il n'a que des inconnues principales.
2. Un système échelonné admet une infinité de solutions si et seulement si il possède des inconnues secondaires. Dans ce cas on peut paramétrer les solutions à l'aide des inconnues secondaires.
3. Un sytème linéaire échelonné est incompatible si et seulement si il admet un pivot sur la colonne des seconds membres.

**Démonstration :** Dans un système échelonné, trois situations peuvent se présenter :

— le système n'admet que des inconnues principales,

— le système admet des inconnues principales et des inconnues secondaires et n'a pas de pivot sur le second membre,

— le système admet des inconnues principales et secondaires et admet un pivot sur le second membre.

Procédons par disjonction de cas :

1. Nous avons vu qu'un système échelonné n'admettant que des inconnues principales se résout par remontées successives.
2. Dans le cas où le système admet des inconnues secondaires, alors en plaçant celle-ci comme paramètres dans le second membre on retouve un système n'ayant que des inconnues principales. En procédant à des remontées successives on trouve ainsi les solutions qui dépendent de ces paramètres. Il y en a donc une infinité.
3. Un système échelonné comporte un pivot sur la colonne des seconds membres si et seulement si la ligne correspondante est de la forme $0 = \alpha$ avec $\alpha$ un scalaire non nul. Peu importe les autres lignes un tel système n'admet pas de solution. ■

# 4 Résolution d'un système linéaire, pivot de Gauss

Dans la partie précédente, nous avons vu que l'on peut résoudre facilement les systèmes linéaires échelonnés. Le but de cette partie est de donner une méthode pour transformer un système linéaire quelconque en sytème linéaire échelonné tout en gardant les mêmes soulutions. C'est la méthode (ou algorithme) du pivot de Gauss. Nous l'avons vu dans l'introduction, on attribu cette méthode à Gauss mais on en trouve des traces dans un texte chinois vieux de plusieurs millénaires.

## 4.1 Opérations élémentaires

Nous allons voir une série d'opérations sur les lignes des systèmes qui nous servirons à l'algorithme du pivot de Gauss.

**Définition 11.**

Soit $(S)$ un système. On apelle **opération élémentaire sur les lignes** l'une des opérations suivantes :

1. Échanger deux lignes. On note cette opération $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. Multiplier une ligne par un réel $a$ (ou un complexe) **différent de zéro**. On note cette opération $L_i \longleftarrow aL_i$.
3. Additionner à une ligne le multiple d'une autre ligne. On note cette opération $L_i \longleftarrow L_i + bL_j$ (ici $b$ est un réel ou un complexe quelconque).

On fera de même avec la matrice associée ou la matrice augmentée associée. (Nous traduirons ces opérations sur les matrices au chapitre prochain). De telles opérations sur les lignes des matrices sont aussi appelées **opération élémentaire sur les lignes**.

- **Remarque**

En combinant les opérations (2) et (3) on obtient l'opération :

$$L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$$

avec $a$ $b$ deux réels (ou complexes) et $\boxed{a \neq 0}$.

**Proposition 12.**

Une **opération élémentaire sur les lignes** est réversible. C'est à dire que pour toute opération élémentaire il existe une autre opération élémentaire redonnant le système de départ.

**Démonstration :** Soit $S$ un système linéaire de taille $n \times p$ ($n$ lignes $p$ inconnues). Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

1. L'opération réciproque de $L_i \longleftrightarrow L_j$ est elle même.
2. Soit $a \in \mathbb{K}^*$, l'opération réciproque de $L_i \longleftarrow aL_i$ est $L_i \longleftarrow \dfrac{1}{a}L_i$.
3. Soit $b \in \mathbb{K}$, l'opération réciproque de $L_i \longleftarrow L_i + bL_j$ est $L_i \longleftarrow L_i - bL_j$ ■

**Définition 13.**

On dit que deux **systèmes linéaires** sont **équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
Cette définition s'applique aussi aux **matrices**. On dira que deux matrices sont **équivalentes par ligne** si elles se déduisent l'une de l'autre par une une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Si deux matrices $A$ et $A'$ sont équivalentes par lignes on notera :

$$A \underset{L}{\sim} A'$$

Bien sûr cette défintion et surtout l'intérêt de ces opérations élémentaires est justifié par la proposition suivante :

**Proposition 14.**

Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

**Démonstration :** Soit $(S)$ un système linéaire à $n$ équations et $p$ inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

et $(S')$ un système linéaire obtenue après une opération élémentaire sur les lignes à partir de $(S)$. Le système $(S')$ a lui aussi $n$ lignes et $p$ inconnues.
Nous voulons montrer que l'ensemble des solutions de $(S)$ et de $(S')$ sont égaux. Pour cela on raisonne par double inclusion.

**Soit $(x_1, \cdots, x_p)$ une solution de $(S)$.**

- Si $(S')$ a été obtenu après l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ (où $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$) alors $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de la ligne $i$ de $(S')$ puisque $(x_1, \cdots, x_p)$ était solution de la ligne $j$ de $(S)$ même chose pour la ligne $j$ de $(S)$. Le reste des lignes n'ayant pas changé, $(x_1, \cdots, x_p)$ est bien solution de $(S')$.
- Si $(S')$ a été obtenu après l'opération $L_i \longleftarrow aL_i$ (où $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $a \in \mathbb{K}^*$) alors comme $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(S)$ on a en particulier :
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i$$
Alors en multipliant cette ligne par $a$ on déduit que $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de la ligne $i$ de $(S')$, comme les autres lignes n'ont pas été modifiées $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(S')$.
- Si $(S')$ a été obtenu après l'opération $L_i \longleftarrow L_i + bL_j$ (où $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $b \in \mathbb{K}$) alors comme $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(S)$ on a :
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i$$
$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jp}x_p = b_j$$
En additionnant la première ligne à $b$ fois la seconde on en déduit que $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de la ligne $i$ de $(S')$ les autres lignes n'ayant pas été modifiées $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(S')$.

Ainsi si $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(S)$ alors $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(S')$.

**Réciproquement** si $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(S')$ comme d'après la proposition précdente $(S)$ s'obtient à partir de $(S')$ par une opération élémentaire sur les lignes le raisonnement précédent s'applique de la même façon et $(x_1, \cdots, x_p)$ est bien solution de $(S)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S) \text{ est égal à l'ensemble des solutions de } (S')}$$ ■

## 4.2 Pivot de Gauss

Soit $(S)$ un système linéaire.
$$(S) = \left\{ \begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p & = & 0 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p & = & 0 & (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p & = & 0 & (L_n) \end{array} \right.$$
Pour échelonner $(S)$ à l'aide du pivot de Gauss-Jordan :
$(*)$ On considère la première des $p$ inconnues du système $(S)$, à savoir $x_1$.

- **Si tous les coefficients de $x_1$ sont nuls**
alors $(S)$ se présente sous la forme
$$(S) = \left\{ \begin{array}{ccccccccl} 0x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \quad (L_1) \\ 0x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & 0 \quad (L_2) \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & 0 \quad (L_n) \end{array} \right.$$
Il n'y a alors rien à échelonner à cette étape. On applique alors $(*)$ au système $(S^{(2)})$ suivant :
$$(S^{(2)}) = \left\{ \begin{array}{cccccccl} a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & 0 & (L_1) \\ a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & 0 & (L_2) \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & 0 & (L_n) \end{array} \right.$$
- **Si au moins un des coefficients de $x_1$ est non nul**

  — par échange de lignes on ramène le pivot en première ligne. On obtient ainsi un système avec $a_{1,1} \neq 0$. On peut faire un échange de façon à ce que le pivot de la nouvelle première ligne soit le plus simple possible le mieux étant 1 ou $-1$.

— on utilise ensuite la première ligne pour suprimer la variable $x_1$ dans le reste des lignes. C'est à dire pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ on effectue l'opération élémentaire

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$$

A cette étape bien noter les opérations que vous faites !
On se retrouve alors avec un système de la forme :

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \quad (L_1) \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & 0 \quad (L_2) \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & 0 \quad (L_n) \end{array} \right.$$

et on applique l'étape $(*)$ au système

$$(S^{(2)}) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & 0 \quad (L_2) \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & 0 \quad (L_n) \end{array} \right.$$

Dans ces deux cas le système sur lequel on recommence l'étape a une inconnue de moins. Ainsi en au plus un nombre fini d'étape l'algorithme s'arrête !
Nous allons voir cette méthode sur des exemples.

**Exemple 7**

1. $(S_1) \iff \left\{ \begin{array}{rcl|l} x + 2y + 3z & = & 2 & L_1 \\ 3x + y + 2z & = & 1 & L_2 \\ 2x + 3y + z & = & 0 & L_3 \end{array} \right.$ Ici le pivot est 1 sur la première ligne, gardons donc cette ligne à sa place. On effectue ensuite l'élimination de la variable $x$ dans le reste des lignes.

$$S_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcr|l} x + 2y + 3z & = & 2 & L_1 \\ -5y - 7z & = & -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -y - 5z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right.$$

On applique maintenant cette même méthode aux lignes $L_2$ et $L_3$ pour éliminer la variable $y$ dans la dernière ligne. Par soucis de simplicité des calculs on échange les deux dernières lignes puis on multiplie la deuxième par $-1$, cela permet d'avoir un pivot plus simple. On a alors :

$$S_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcr|l} x + 2y + 3z & = & 2 & L_1 \\ -y - 5z & = & -4 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -5y - 7z & = & -5 & \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr|l} x + 2y + 3z & = & 2 & L_1 \\ y + 5z & = & 4 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ -5y - 7z & = & -5 & \end{array} \right.$$

On élimine ensuite la variable $y$ de la dernière ligne :

$$S_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcr|l} x + 2y + 3z & = & 2 & L_1 \\ y + 5z & = & 4 & \\ 18z & = & 15 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{array} \right.$$

Le système est échelonné ! Par remontées successives on obtient que $(S_1)$ a une unique solution $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.
*Ici la rédaction a été ralongée pour une meilleure compréhension quand on est pas habitué au pivot mais si les opérations sont bien notées une suite d'équivalence est correcte.*

2. On peut aussi utiliser la notation des matrices augmentées :
$(S_2) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 2 \\ x - y + z & = & 1 \\ 2x - y + z & = & 0 \end{array} \right.$ On a ainsi la suite l'équivalence

$$(A \mid B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_2 \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$(A \mid B) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Ainsi le système $(S_2)$ est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ y+z & = & 2 \\ -2z & = & -4 \end{array}\right.$$

En procédant par remontées successives on obtient que $(S_2)$ admet une unique solution $(-1,0,2)$

### 4.3 Exemples avec un paramètre

Trois exemples de systèmes à paramètres.

**Attention !**
Ne pas confondre les paramètres du système et éventuellement les paramètres des solutions. Les paramètres du système sont fixés ! Ce ne sont pas des inconnues à trouver !

- Discuter selon les valeurs de $a$, $b$ les solutions du système suivant :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ & & 2y & = & a-b \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Ce système est échelonné et n'a que des variables principales il admet donc une unique solution. En remontant on trouve que la solution est $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$.

- Discuter selon les valeurs de $a$, $b$ les solutions du système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & + & y & = & b \end{array}\right.$$

On a l'équivalence :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & + & y & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ & & 0 & = & a-b \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Ce système est échelonné et à une inconnue principale et une inconnue secondaire. Selon les valeurs de $a$ et $b$ deux situations peuvent avoir lieu :

— Si $a=b$ alors le système admet une infinité de solutions donné par l'ensemble :

$$\{(a-y,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

— Si $a \neq b$, alors le système n'admet aucune solution.

- Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la compatibilité et les solutions du système suivant :

$$(S) = \left\{\begin{array}{ccccc} mx & + & (m+4)y & = & 8 \\ x & + & (m+1)x & = & m+2 \end{array}\right.$$

*Attention $m$ ne peut pas être considérer comme un pivot puisqu'il pourrait être nul ! Si vous n'avez pas le choix alors il faut faire une disjonction de cas.*

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 8 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ & & [(m+4)-m(m+1)]y & = & 8-m(m+2) \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ & & (2-m)(2+m)y & = & -(m-2)(m+4) \end{array}\right.$$

*J'ai choisi cette rédaction mais vous pouvez bien sûr faire la même chose avec l'écriture matricielle.*
On peut maintenant procéder à la discussion.
*La discussion doit se déroulée en fonction de la valeur des pivots, sont-ils nuls ou non. Ici le seul pivot qui dépend du paramètre $m$ est celui de $y$. Cherchez les valeurs pour lesquelles le pivot s'annulent (ici 2 et $-2$, d'où l'intêret de factoriser l'expression) et remplacer dans le système.*

— **Si** $m = 2$ alors le système $(S)$ est équivalent à :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 3y & = & 4 \\ & & 0y & = & 0 \end{array} \right.$$

La deuxième ligne peut être enlevée puisque l'égalité $0 = 0$ est toujours vraie. Dans ce cas $(S)$ est donc un système compatible admettant une inconnue secondaire $y$. L'ensemble des solutions de $(S)$ est alors :

$$\left\{ (4 - 3y, y), y \in \mathbb{R} \right\}$$

— **Si** $m = -2$ alors $(S)$ est équivalent à

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 0 \\ & & 0y & = & 8 \end{array} \right.$$

Dans ce cas le système admet donc un pivot sur la colonne des seconds membres, c'est un système incompatible.

— **Enfin si** $m \neq 2$ **et** $m \neq -2$ le sytème admet deux inconnues principales il admet donc une unique solution obtenue par remontée.

$$\left( \frac{m-4}{m+2}, \frac{m+4}{m+2} \right)$$