Lycée Condorcet
PCSI

Janvier 2025

Calcul matriciel

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on fixe deux entiers naturels non nuls n et p.

1 Matrices rectangulaires

1.1 Présentation

• Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de nombres (dans $\mathbb{K}$) à n lignes et p colonnes. Se donner une telle matrice, c'est donc se donner np scalaires, en précisant l'emplacement de chacun de ces scalaires (le numéro de ligne et le numéro de colonne).

Notation

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on notera $[A]_{ij}$ le scalaire sur la i-ième ligne et j-ième colonne.

• **Exemples.**

• **Vocabulaire.**
- Si $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, et on appelle **matrice carrée d'ordre** n tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $n = 1$: on appelle matrice-ligne (à p colonnes) tout élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- Si $p = 1$: on appelle matrice-colonne (à n lignes) tout élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

• **Remarques**
- On appelera matrice nulle de taille $n \times p$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls. On la notera $0_{n,p}$.

Proposition 1.

Soient A et B deux matrices. Elles sont égales si et seulement si elles ont même taille $n \times p$ et si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$[A]_{ij} = [B]_{ij}$$

1.2 Addition et multiplication par un scalaire

Définition 2.

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, On définit les matrices de taille $n \times p$ $A+B$ et λA par pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}, \quad [\lambda A]_{ij} = \lambda [A]_{ij}.$$

- Remarque. Pour additionner deux matrices, il faut qu'elles aient la même taille.

- Exemples.

Proposition 3 (propriétés des combinaisons linéaires de matrices)**.**

1. La matrice nulle est neutre pour l'addition des matrices : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on a $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
2. Pour toutes les matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   - $A + B = B + A$ (l'opération est communtative).
   - $(A+B)+C = A+(B+C)$ (l'opération est associative).
3. Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tous scalaires λ, μ de $\mathbb{K}$,
   - $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.
   - $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (distributivité de la multiplication par un scalaire sur la somme).

1.3 Produit matriciel

1.3.1 Produit de deux matrices

Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 4.

Le produit de A et B, dans cet ordre, est la matrice à m lignes et p colonnes, notée AB, définie par, pour tout $(k,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$,

$$[AB]_{kj} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ki}[B]_{ij}.$$

- **Remarques**

1. Pour que le produit AB soit défini, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.
   Le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ avec une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$.
2. Si A est une matrice et X est une matrice colonne telle que le produit AXsoit défini alors AX est une matrice colonne combinaison linéaire des colonnes de A.

Exemple 1

Dans la liste suivante, déterminer tous les couples de matrices dont on peut faire le produit, et calculer alors le produit.
Déterminer tous les couples de matrices qui commutent.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.

On a, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et toute matrice $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

Notation

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note I_m la matrice carrée d'ordre m (cette matrice a donc m lignes et m colonnes) dont les coefficients situés sur la diagonale valent 1, et les autres 0.

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $I_m = (a_{k\ell})_{1 \le k, \ell \le m}$, on a : $\forall (k, \ell) \in [\![1, m]\!]^2,\ a_{k\ell} = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$. La matrice I_m s'appelle la **matrice identité** (d'ordre m).

Proposition 6.

Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$AI_p = A \quad \text{et} \quad I_n A = A.$$

$$A0_{p,p} = 0_{n,n}A = 0_{n,p}$$

Proposition 7.

On a les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et pour tout couple de matrice $(B,C) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})^2$, on a :
$$A \times (B+C) = A \times B + A \times C$$
2. Pour tout couple de matrice $(A,B) \in \mathcal{M}_{p,q}^2$ et toute matrice $C \in \mathcal{M}_{q,r}$, on a :
$$(A+B) \times C = A \times C + B \times C$$
3. Pour tout couple de matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}$, toute matrice $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ et toutscalaire λ on a :
$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Attention !
Le produit matriciel n'est ni commutatif ni intègre. C'est à dire que si A et B sont deux matrices

- alors même si AB et BA sont définies alors l'égalité : $AB = BA$ n'est pas toujours vraie.
- si $AB = 0$ cela n'implique pas nécessairement que $A = 0$ ou $B = 0$.

1.4 Transposée d'une matrice

Définition 8.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice, notée ${}^tA$ ou notée A^T, appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, et telle qu'on ait
$$\forall (j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ [A^T]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Exemple 2

1. La transposée d'une matrice colonne à n lignes est une matrice ligne à n colonnes.
2. La transposée d'une matrice ligne à p colonnes est une matrice colonne à p lignes.
3. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$. Alors $A^T \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$, et $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

- **Remarque**. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour colonnes $C_1, \ldots, C_n$: $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \ldots & C_p \\ | & & | \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} — & C_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & C_p^T & — \end{pmatrix}$ est la matrice dont les lignes sont $C_1^T, \ldots, C_p^T$.

Proposition 9.

Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

1. Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
2. Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$.
3. Pour toute $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et toute $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

1.5 Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 10.

Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la position (i,j), qui vaut 1. Une telle matrice est parfois dite *élémentaire*.

Proposition 11.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices de la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. Cette décomposition est unique. Plus précisément,

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}[M]_{i,j}E_{i,j}$$

Définition 12.

Pour tout couple d'entiers (i,j), on définit le **symbole de Kronecker** par

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Proposition 13.

On a pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$ on a dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$:

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

2 Cas des matrices carrées

2.1 Puissances d'une matrice carrée.

Définition 14.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout entier naturel p, on définit par récurrence la **puissance** p-ème de M, notée M^p par

$$\begin{cases} M^0 & = & I_n \\ M^{p+1} & = & M.M^p \end{cases}$$

Proposition 15.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et pour tous entiers naturels p et q,

$$M^pM^q = M^qM^p = M^{p+q}.$$

Proposition 16.

Soient A et B deux matrices carrées de taille n qui **commutent** (i.e. $AB = BA$). Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

1. $A^p - B^p = (A - B) \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$.
2. $(A + B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$. (Binôme de Newton)

Attention !
Si les matrices ne commutent pas les formules précédentes sont fausses !

2.2 Matrices triangulaires

Définition 17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que A est **triangulaire supérieure** si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$, $[A]_{ij} = 0$ (i.e. les coefficients situés sous la diagonale sont nuls).

— On dit que A est **triangulaire inférieure** si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, $[A]_{ij} = 0$ (i.e. les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls).

— Si A est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure (i.e. les coefficients situés en dehors de la diagonale sont nuls), on dit que A est **diagonale**.
Si $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ sont des scalaires on notera $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale :

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- **Exemples.**

Proposition 18.

- La matrice nulle est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale).
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures, resp. diagonales), et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda A + \mu B$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale).

Proposition 19.

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et deux matrices diagonales $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D' = \mathrm{Diag}(d'_1, \dots, d'_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

- La matrice DM est déduite de M en multipliant la ligne i de M par d_i, et ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- La matrice MD' est déduite de M en multipliant la colonne j de M par d'_j, et ce pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

Exemple 3

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ecrire DM et MD.

Proposition 20.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures, resp. diagonales) est une matrice triangulaire supérieure (resp. trigulaire inférieure, resp diagonale).

Proposition 21.

Soit $(d_1, \cdots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ et $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$D^k = \mathrm{Diag}(d_1^k, \ldots, d_n^k)$$

2.3 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition 22.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. On dit que A est **symétrique** si $A^T = A$.
2. On dit que A est **antisymétrique** si $A^T = -A$.

- **Exemples.**

- **Remarque**

Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Proposition 23.

- La matrice nulle est symétrique (resp. antisymétrique).
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices symétriques (resp. antisymétriques), et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda A + \mu B$ est une matrice symérique (resp. antisymétrique).

- **Remarque**. Le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément symétrique. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

et AB n'est pas symétrique.

2.4 Matrices inversibles, une première introduction

Définition 24.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Proposition 25.

Si une matrice A est inversible alors l'inverse est unique et on note l'inverse A^{-1}.

- **Notation**. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Exemples**.

Proposition 26.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.
   Alors A est inversible, et $A^{-1} = B$.
2. On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.
   Alors A est inversible, et $A^{-1} = B$.

Proposition 27.

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 28.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proposition 29.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Notons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Alors A est inversible si et seulement si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, et dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

- **Exemples.**