Lycée Condorcet — Janvier 2025
PCSI

# Systèmes linéaires

**Exercice 1.**
Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$ :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1\\ 2x+y-z &=& 2\\ x-2y+3z &=& 0\end{array}\right. \quad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& 4\\ -x+y+2z &=& 3\\ 7x+3y-5z &=& 2\end{array}\right. \quad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} y-z &=& 1\\ 2x+y+z &=& 3\\ x+z &=& 1\end{array}\right. \quad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 3\\ x+y+2z &=& -1\\ x+z &=& 1\end{array}\right.$$

$$e)\ \left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y-2z &=& 0\\ 3x-y+z &=& 3\\ x+y+z &=& 1\\ x-y+z &=& -2\end{array}\right. \quad f)\ \left\{\begin{array}{rcl} 3x-6y-6z &=& 0\\ 3x-2y-3z &=& 0\\ -2x+4y+6z &=& 0\\ 6x-12y-12z &=& 0\end{array}\right.$$

**Exercice 2.**
Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} -3x+y+z+t &=& 0\\ x-3y+z+t &=& 0\\ x+y-3z+t &=& 0\\ x+y+z-3t &=& 0\end{array}\right. \quad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} -x+3y-t &=& 0\\ 2x-y+2z+2t &=& 0\\ 5y+2z &=& 0\\ x+2y+2z+t &=& 0\end{array}\right. \quad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1\\ x+y-z-t &=& -1\end{array}\right.$$

**Exercice 3.**
À quelles conditions portant sur les paramètres réels $a$, $b$, $c$ et $d$, les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Résoudre alors chacun d'eux.

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& a\\ x-y-z &=& b\\ -3x+y+3z &=& c\end{array}\right. \quad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 3x-3y-2z &=& a\\ -4x+4y+3z &=& b\\ 2x-2y-z &=& c\end{array}\right. \quad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} -2x-3y+3z &=& a\\ x+2y-z &=& b\\ x+y-2z &=& c\end{array}\right. \quad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z &=& a\\ 3x+y-5z &=& b\\ 4x+2y-z &=& c\\ x-7z &=& d\end{array}\right.$$

**Exercice 4.**
Discuter et résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz &=& m\\ mx+y+mz &=& 1\\ mx+my+z &=& m\end{array}\right. \quad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+my+z &=& 1\\ mx+y+(m-1)z &=& m\\ x+y+z &=& m+1\end{array}\right. \quad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} (m+1)x+my &=& 2m\\ mx+(m+1)y &=& 1\end{array}\right.$$

**Exercice 5.**
Pour quelles valeurs de $\lambda$ les sytèmes suivants ne sont-ils pas de Cramer ?

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl}(2-\lambda)x+3y & = & 0\\ 3x+(2-\lambda)y & = & 0\end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl}(1-\lambda)x-\quad y-\quad z & = & 0\\ -2x+(2-\lambda)y+\ 3z & = & 0\\ 2x-\ 2y+(-3-\lambda)z & = & 0\end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{rcl}(2-\lambda)x\qquad +\ 4z & = & 0\\ 3x-(4+\lambda)y+12z & = & 0\\ x-2y+(5-\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$

**Exercice 6.**
Soient $(a,b,c)$ trois réels tels que $a \neq b$. On conisdère le système suivant, d'inconnues réels $x, y, z, t$ :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl}x+ay+z+bt & = & 1\\ ax+a^2y+bz+b^2t & = & c\\ a^2x+a^3y+b^2z+b^3t & = & c^2\end{array}\right.$$

Montrer que l'ensemble des solutions de $(S)$ est non vide si et seulement si $c \in \{a,b\}$.

**Exercice 7.**
L'espace est rapporté à $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère dans l'espace les trois points $A$ $B$ et $C$ de coocrdonnées respectives $(-1,2,1)$, $(1,-6,-1)$ et $(2,2,2)$. Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ défini par les points $A$, $B$, $C$ puis une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Mêmes questions pour les points $A'$, $B'$ et $C'$ de coordonnées respectves $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ et $(4,0,0)$.
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équations :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl}x+y-3z & = & -6\\ -2x-4y+3z & = & -1\end{array}\right.$$

Donner une écriture paramètrique de $\mathcal{D}$.

**Exercice 8.**
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations suivantes :

$$(P_1) \quad : \quad (1-a)x-2y+z=0$$

$$(P_2) \quad : \quad 3x-(1+a)y-2z=0$$

$$(P_3) \quad : \quad 3x-2y-(1+a)z=0$$

**Exercice 9.** (*)
Soit $u_1,\cdots,u_n \in \mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ si

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i u_i = (0,\cdots,0),$$

alors on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $n$-uplet $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ tel que : $v = \sum_{k=1}^{n} \mu_i u_i$.