Equation fonctionnelle (Banque Agro)

Dans tout ce problème, a désigne un réel positif et E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur $[0,a]$.

Une fonction f de E vérifie la condition $(*)$ si et seulement si

$$(*) \qquad \text{il existe un réel } A \text{ tel que pour tout } x \text{ dans } [0,a],\ |f(x)| \leq Ax.$$

On notera S l'ensemble des fonctions de E satisfaisant la condition $(*)$.

Partie A.

1. Soit f une fonction de S.
   (a) Montrer que $f(0)=0$.
   (b) Justifier que f est continue en 0.
2. Démontrer que S contient la fonction nulle et que c'est un ensemble stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire
$$\forall f,g \in S \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \lambda f + \mu g \in S.$$
3. Soit g une fonction telle que $g(0)=0$ et telle que g est dérivable sur $[0,a]$ et de dérivée bornée sur $[0,a]$. Démontrer que g appartient à S.
4. En déduire que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ et s'annulant en 0 appartient à S.
5. (a) Redémontrer que pour tout réel x différent de 1 et pour tout entier naturel n, on a
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
   (b) En déduire d'une part que pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout entier naturel n, on a
$$\sum_{k=0}^{n} x^k \leq \frac{1}{1-x},$$
   d'autre part que pour tout x dans $[0,1[$, $\sum_{k=0}^{n} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$.

Partie B.

Soit φ une fonction satisfaisant $(*)$ et ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Pour tout x dans $[0,a]$ et pour tout entier naturel n, on note

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

1. (a) Montrer que pour tout réel x dans $[0,a]$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0,a]$ la suite de terme général $u_n(x)$ converge vers une limite finie, que l'on notera $u(x)$.
   (c) La question précédente définit une fonction u sur $[0,a]$. Montrer qu'elle appartient à S.
2. Soit f une fonction définie sur $[0,a]$. On dit qu'elle vérifie la condition $(**)$ si et seulement si
$$(**) \qquad \forall x \in [0,a] \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x).$$
   (a) Montrer que u vérifie $(**)$.
   (b) Soient f et g deux fonctions vérifiant $(**)$. On note $h=f-g$.
   Montrer que pour tout x dans $[0,a]$ et pour tout entier naturel n on a
$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$
   (c) Déduire de ce qui précède qu'il existe au plus une fonction continue en 0 vérifiant $(**)$ et prenant en 0 une valeur donnée.
   (d) Montrer que si f vérifie $(**)$ alors
$$\forall x \in [0,a] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right).$$
   (e) Montrer qu'il existe une et une seule fonction de S vérifiant $(**)$.
3. Soit $\alpha \in [1,+\infty[$. Notons φ_α la fonction définie sur $[0,a]$ par $\varphi_\alpha(0)=0$ et $\forall x \neq 0\ \varphi_\alpha(x) = x^\alpha$.
   (a) Montrer que φ_α est dans S et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer l'unique fonction f dans S vérifiant la condition $(**)$ pour $\varphi = \varphi_\alpha$.