Lycée Condorcet
PCSI

Décembre 2021

Systèmes linéaires

Exercice 1.
Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-\ y+\ z & = & 1 \\ 2x+\ y-\ z & = & 2 \\ x-2y+3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+\ z & = & 4 \\ -x+\ y+2z & = & 3 \\ 7x+3y-5z & = & 2 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} y-\ z & = & 1 \\ 2x+\ y+\ z & = & 3 \\ x\quad +z & = & 1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{l} 2x\ -y+\ z \\ x\ +y\ +2z \\ x\qquad +\ z \end{array}\right.$$

$S=\{(1,-1,-1)\}$ $\qquad$ $S=\{(-4,5,-3)\}$ $\qquad$ $S=\{(1-z,1+z,z), z\in\mathbb{R}\}$ $\qquad$ $S=\emptyset$

$$e)\ \left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y-2z & = & 0 \\ 3x-\ y+\ z & = & 3 \\ x+\ y+\ z & = & 1 \\ x-\ y+\ z & = & -2 \end{array}\right. \qquad f)\ \left\{\begin{array}{rcl} 3x-6y-6z & = & 0 \\ 3x-2y-3z & = & 0 \\ -2x+4y+6z & = & 0 \\ 6x-12y-12z & = & 0 \end{array}\right.$$

$S=\emptyset$

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} -3x+\ y+\ z+\ t & = & 0 \\ x-3y+\ z+\ t & = & 0 \\ x+\ y-3z+\ t & = & 0 \\ x+\ y+\ z-3t & = & 0 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} -x+3y\qquad -\ t & = & 0 \\ 2x-\ y+2z+2t & = & 0 \\ 5y+2z & = & 0 \\ x+2y+2z+\ t & = & 0 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ x+y-z-t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 3.
À quelles conditions portant sur les paramètres réels a, b, c et d, les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Résoudre alors chacun d'eux.

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+\ z & = & a \\ x-y-\ z & = & b \\ -3x+y+3z & = & c \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 3x-3y-2z & = & a \\ -4x+4y+3z & = & b \\ 2x-2y-\ z & = & c \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} -2x-3y+3z & = & a \\ x+2y-\ z & = & b \\ x+\ y-2z & = & c \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+\ y-3z & = & a \\ 3x+y-5z & = & b \\ 4x+2y-\ z & = & c \\ x\qquad -7z & = & d \end{array}\right.$$

Exercice 4.
Discuter et résoudre en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+\ y+mz & = & m \\ mx+\ y+mz & = & 1 \\ mx+my+\ z & = & m \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+my+\quad z & = & 1 \\ mx+y+(m-1)z & = & m \\ x+\ y+\quad z & = & m+1 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} (m+1)x+\ my & = & 2m \\ mx+(m+1)y & = & 1 \end{array}\right.$$

Corrigé :
a) Soit $m\in\mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\ y+mz & = & m \\ mx+\ y+mz & = & 1 \\ mx+my+\ z & = & m \end{array}\right. \iff \begin{array}{c} \\ L_2-mL_1 \\ L_3-mL_1 \end{array} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m \\ & & (1-m)y & + & m(1-m)z & = & 1-m^2 \\ & & & & (1-m^2)z & = & m(1-m) \end{array}\right.$$

Peut importe les valeurs de m le dernier système est échelonné. On peut donc discuter des solutions en fonctions des valeurs de m.

- **Si** $m \neq 1$ **et** $m \neq -1$**.**
  Dans ce cas le sytème n'admet que des inconnues principales et il admet donc une unique solution obtenue par substitution $\left(-1, \frac{2m+1}{1+m}, \frac{m}{1+m}\right)$. *Pensez à simplifier par* $1-m$ *les équations.*
- **Si** $m = 1$
  Le système est alors équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

  Il admet une infinité de solutions :

$$\left\{\left(1-y-z, y, z\right) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- **Si** $m = -1$.
  Le système est alors équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -2 \end{array}\right.$$

  Le sytème n'admet alors pas de solution.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right. \iff \begin{array}{c} L_1 \ \ L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & my & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{c} L_2 - mL_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ & & (1-m)y & - & z & = & -m^2 \\ & & (m-1)y & & & = & -m \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{c} L_2 \ \ L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ & & (m-1)y & & & = & -m \\ & & (1-m)y & - & z & = & -m^2 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ & & (m-1)y & & & = & -m \\ & & & - & z & = & -m(1+m) \end{array}\right.$$

On peut maintenant discuter des solutions du système en fonction des valeurs de m.

- **Si** $m \neq 1$.
  Le dernier système est alors échelonné et il admet autant de pivots que d'inconnues. Toutes les inconnues sont donc principales. Le sytème admet donc une unique solution obtenue par substitution :

$$\left(\frac{m^3 - m^2 - 2m + 1}{1-m}, \frac{m}{1-m}, m(1+m)\right)$$

  Si $m = 1$.
  Alors le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & 0 & & & = & -1 \\ & & & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

  Le système n'admet donc pas de solution.

c). Comme les coefficients des inconnues dépendent tous de m on est obligé de commencer dès le début la disjonction de cas.

- **Si** $m = 0$ alors le système est égal à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & & y & = & 1 \end{array} \right.$$

  Qui admet une unique solution $(0, 1)$.

- Supposons maintenant que $m \neq 0$. Le système est alors équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & \dfrac{m+1}{m}y & = & \dfrac{1}{m} \\ (m+1)x & + & my & = & 2m \end{array} \right. \iff \quad L_2 - (m+1)L_1 \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & \dfrac{m+1}{m}y & = & \dfrac{1}{m} \\ & & -\dfrac{2m+1}{m}y & = & \dfrac{(m-1)(2m+1)}{m} \end{array} \right.$$

  — **Si** $m \neq -1/2$.
  Alors le système admet une unique solution : $(m, 1-m)$.

  — **Si** $m = -1/2$. Alors le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & - & y & = & -2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

  L'ensemble des solutions est alors

$$\{(-2 + y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 5.
Pour quelles valeurs de λ les sytèmes suivants ne sont-ils pas de Cramer ?

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl}(2-\lambda)x+3y & = & 0\\ 3x+(2-\lambda)y & = & 0\end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl}(1-\lambda)x-\quad y-\quad z & = & 0\\ -2x+(2-\lambda)y+\ 3z & = & 0\\ 2x-\ 2y+(-3-\lambda)z & = & 0\end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{rcl}(2-\lambda)x\qquad +\ 4z & = & 0\\ 3x-(4+\lambda)y+12z & = & 0\\ x-2y+(5-\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$

Exercice 6.
Soient (a, b, c) trois réels tels que $a \neq b$. On conisdère le système suivant, d'inconnues réels x, y, z, t :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl}x+ay+z+bt & = & 1\\ ax+a^2y+bz+b^2t & = & c\\ a^2x+a^3y+b^2z+b^3t & = & c^2\end{array}\right.$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est non vide si et seulement si $c \in \{a, b\}$.

Exercice 7.
L'espace est rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère dans l'espace les trois points A B et C de cocrdonnées respectives $(-1, 2, 1)$, $(1, -6, -1)$ et $(2, 2, 2)$. Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ défini par les points A, B, C puis une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Mêmes questions pour les points A', B' et C' de coordonnées respectves $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ et $(4, 0, 0)$.
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équations :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl}x+y-3z & = & -6\\ -2x-4y+3z & = & -1\end{array}\right.$$

Donner une écriture paramètrique de $\mathcal{D}$.

Exercice 8.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations suivantes :

$$(P_1) \quad : \quad (1-a)x - 2y + z = 0$$

$$(P_2) \quad : \quad 3x - (1+a)y - 2z = 0$$

$$(P_3) \quad : \quad 3x - 2y - (1+a)z = 0$$

Exercice 9. (*)
Soit $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ si

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i u_i = (0, \cdots, 0),$$

alors on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique n-uplet $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ tel que : $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_i u_i$.