Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion :

$$P(n) : \text{"} \frac{f(c^n x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \text{"}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\frac{f(c^0 x)}{f(x)} = 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

ainsi $\boxed{P(0) \text{ est vraie}}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $P(n)$ vraie.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{f(c^{n+1}x)}{f(x)} = \frac{f(c^{n+1}x)}{f(c^n x)} \times \frac{f(c^n x)}{f(x)}$$

Le deuxieme terme du produit verifie par hypothèse de récurrence

$$\frac{f(c^n x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Pour calculer la limite du premier terme on va procéder par composition de limites.
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $g(x) = c^n x$ on a

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{car } c^n > 0.$$

et comme $\frac{f(cx)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ on a

$$\frac{f(c\,g(x))}{f(g(x))} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Ainsi $$\frac{f(c^{n+1}x)}{f(c^n x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

D'où, par produit,

$$\frac{f(c^{n+1}x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \times 1$$

Ainsi, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
Le principe de recurrence permet ainsi de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{f(c^n x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Nous allons maintenant déduire de cette assertion que pour tout $d \geq 1$

$$\frac{f(dx)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

soit $d \geq 1$

Comme $c > 1$ alors $c^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d \leq c^{n_0}$.

Par ailleurs comme $c > 1$ on a :

$$1 \leq d \leq c^{n_0}$$

~~Mais~~ Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$x \leq dx \leq c^{n_0} x$$

Mais la fonction f est croissante ainsi

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f(x) \leq f(dx) \leq f(c^{n_0} x)$

et comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$1 \leq \frac{f(dx)}{f(x)} \leq \frac{f(c^{n_0} x)}{f(x)}$$

Or d'après ce que l'on a montré précédemment

$$\frac{f(c^{n_0} x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

D'où, d'après le théorème d'encadrement

$$\frac{f(dx)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Soit $0 < d < 1$. On a alors $\frac{1}{d} > 1$

et d'après ce qu'on vient de montrer

$$\frac{f(\frac{1}{d}x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Par quotient on en déduit

$$\frac{f(x)}{f(\frac{1}{d}x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = dx$. On a, comme $d > 0$,

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

ainsi par composition de limites :

$$\frac{f(g(x))}{f(\frac{1}{d}g(x))} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

D'où

$$\frac{f(dx)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$