Equation fonctionnelle (Banque Agro)

Dans tout ce problème, a désigne un réel positif et E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur $[0,a]$.

Une fonction f de E vérifie la condition $(*)$ si et seulement si

$$(*) \qquad \text{il existe un réel } A \text{ tel que pour tout } x \text{ dans } [0,a],\ |f(x)| \leq Ax.$$

On notera S l'ensemble des fonctions de E satisfaisant la condition $(*)$.

Partie A.

1. Soit f une fonction de S.
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Justifier que f est continue en 0.
2. Démontrer que S contient la fonction nulle et que c'est un ensemble stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall f, g \in S \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda f + \mu g \in S.$$

3. Soit g une fonction telle que $g(0) = 0$ et telle que g est dérivable sur $[0,a]$ et de dérivée bornée sur $[0,a]$. Démontrer que g appartient à S.
4. En déduire que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ et s'annulant en 0 appartient à S.
5. (a) Redémontrer que pour tout réel x différent de 1 et pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

   (b) En déduire d'une part que pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \leq \frac{1}{1-x},$$

   d'autre part que pour tout x dans $[0,1[$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$.

Partie B.

Soit φ une fonction satisfaisant $(*)$ et ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Pour tout x dans $[0,a]$ et pour tout entier naturel n, on note

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

1. (a) Montrer que pour tout réel x dans $[0,a]$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0,a]$ la suite de terme général $u_n(x)$ converge vers une limite finie, que l'on notera $u(x)$.
   (c) La question précédente définit une fonction u sur $[0,a]$. Montrer qu'elle appartient à S.
2. Soit f une fonction définie sur $[0,a]$. On dit qu'elle vérifie la condition $(**)$ si et seulement si

$$(**) \qquad \forall x \in [0,a] \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x).$$

   (a) Montrer que u vérifie $(**)$.
   (b) Soient f et g deux fonctions vérifiant $(**)$. On note $h = f - g$.
   Montrer que pour tout x dans $[0,a]$ et pour tout entier naturel n on a

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

   (c) Déduire de ce qui précède qu'il existe au plus une fonction continue en 0 vérifiant $(**)$ et prenant en 0 une valeur donnée.
   (d) Montrer que si f vérifie $(**)$ alors

$$\forall x \in [0,a] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

(e) Montrer qu'il existe une et une seule fonction de S vérifiant $(**)$.

3. Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Notons φ_α la fonction définie sur $[0, a]$ par $\varphi_\alpha(0) = 0$ et $\forall x \neq 0\ \varphi_\alpha(x) = x^\alpha$.
   (a) Montrer que φ_α est dans S et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer l'unique fonction f dans S vérifiant la condition $(**)$ pour $\varphi = \varphi_\alpha$.

Corrigé

Problème. Résolution d'une équation fonctionnelle. (Banque Agro).

Partie A.

1. Soit f une fonction de S.
   (a) Par définition de S, nous savons qu'il existe un réel A tel que $\forall x \in [0, a]\ |f(x)| \leq Ax$. On a donc notamment $|f(0)| \leq A \cdot 0 = 0$, ce qui donne bien $f(0) = 0$.
   (b) Par encadrement, on obtient
$$f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0),$$
   ce qui montre bien que f est continue.
2. Soit n la fonction nulle. Il est clair que
$$\forall x \in [0, a] \quad |n(x)| = 0 \leq 666x.$$
   On a bien démontré que n satisfait $(*)$, avec « $A = 666$ ».
   Soient f et g dans S. Il existe deux constantes A et B telles que
$$\forall x \in [0, a] \quad |f(x)| \leq Ax \quad \text{ et } \quad |g(x)| \leq Bx.$$
   Soient λ et μ deux réels. Pour x dans $[0, a]$, l'inégalité triangulaire amène
$$\begin{aligned} |(\lambda f + \mu g)(x)| &= |\lambda f(x) + \mu g(x)| \\ &\leq |\lambda| \cdot |f(x)| + |\mu| \cdot |g(x)|. \\ &\leq |\lambda| \cdot Ax + |\mu| \cdot Bx \\ &\leq (|\lambda| \cdot A + |\mu| \cdot B)\, x, \end{aligned}$$
   ce qui montre bien que $\lambda f + \mu g$ appartient à S.
3. La fonction g est dérivable sur $[0, a]$. On nous dit que sa dérivée est bornée : il existe donc un réel M tel que $\forall x \in [0, a]\ |g'(x)| \leq M$. D'aprèrs l'inégalité des accroissements finis, la fonction g est M-lipschitzienne sur $[0, a]$. Notamment,
$$\forall x \in [0, a] \quad |g(x) - g(0)| \leq M|x - 0|, \quad \text{i.e. } \ |g(x)| \leq M|x|.$$
4. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$ telle que $h(0) = 0$. Sa dérivée h' est bornée sur ce segment puisqu'elle y est continue (on sait même que h' atteint ses bornes). D'après la question précédente, $h \in S$.
5. (a) Soit x un réel x différent de 1 et un entier naturel n. Un télescopage amène
$$(1 - x) \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (x^k - x^{k+1}) = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}.$$
   (b) Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout entier naturel n, on a $x^{n+1} \in [0, 1]$, d'où
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - x},$$
   Ayant, $x^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1 - x}$.

Partie B.

1. (a) Soit x dans $[0, a]$. Ce nombre ayant été *fixé*, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - On a
$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \geq 0,$$

la fonction φ prenant des valeurs positives par hypothèse.

• Le nombre $u_n(x)$ est une somme que l'on va majorer terme à terme. Pour cela, puisque $\varphi \in S$, on peut considérer une constante $A \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout t dans $[0,a]$, $\varphi(t) \leq At$ (on s'est débarrassé des valeurs absolues puisque φ prend des valeurs positives). On a

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \frac{x}{2^k} \in [0,a] \text{ donc } \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq A \cdot \frac{x}{2^k}.$$

Sommons :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} A\frac{x}{2^k} = Ax\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2Ax.$$

La dernière majoration utilise la question 5.(b) de la partie précédente.

(b) On vient de montrer que la suite de terme $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (on insiste sur le fait que l'on a obtenu un majorant indépendant de n). Le théorème de la limite monotone assure alors que la suite converge vers une limite finie. Puisque la suite dépend du réel x que nous avons fixé au départ, sa limite en dépend aussi a priori : on la note $u(x)$.

(c) Pour x dans $[0,a]$, on a prouvé plus haut :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n(x) \leq 2Ax.$$

(la minoration par 0 vient de ce que φ prend des valeurs positives). Passons à la limite dans cette inégalité large :

$$0 \leq u(x) \leq 2Ax.$$

Ceci met à jour une constante égale à $2A$ nous permettant d'affirmer que $u \in S$.

2. Soit f une fonction définie sur $[0,a]$. On dit qu'elle vérifie la condition $(**)$ si et seulement si

$$(**) \qquad \forall x \in [0,a] \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x).$$

(a) Raisonnons d'abord sur u_n, pour n fixé. Pour tout x dans $[0,a]$, on a

$$u_n(x) - u_n\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2^0}\right) - \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

$$\text{donc } \; u_n(x) - u_n\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

Passons à la limite en n. On a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x)$ et $u_n(x/2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x/2)$ par définition de u. La fonction φ est dans S donc, comme on l'a vu en question A.1, elle est continue en 0, où elle s'annule. On a donc $\varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = 0$. Le passage à la limite nous donne donc

$$u(x) - u(x/2) = \varphi(x),$$

ce qui achève de montrer que u vérifie $(**)$.

(b) Puisque f et g sont deux fonctions vérifiant $(**)$, on a

$$\forall x \in [0,a] \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) \quad \text{ et } \quad g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x).$$

Faisons la différence des deux égalités, on obtient

$$\forall x \in [0,a] \quad h(x) = h(x/2).$$

Pour x fixé, on a

$$h(x) = h(x/2) = h(x/4) = \cdots = h(x/2^n).$$

(les puristes feront une récurrence).

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

(c) Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues en 0, satisfaisant $(**)$ et telles que $f_1(0) = f_2(0)$. Montrons que $f_1 = f_2$ en nous intéressant à leur différence h. Soit $x \in [0,a]$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h(x) = h(x/2^n).$$

Faisons tendre n vers $+\infty$,

$$h(x/2^n) \underset{n\to}{+\infty} h(0) = f_1(0) - f_2(0) = 0,$$

ceci car h est continue en 0 comme somme de fonctions continues. Bien entendu, $h(x) \underset{n\to}{+\infty} h(x)$. On obtient donc

$$\forall x \in [0,a] \quad h(x) = 0,$$

ce qui achève de montrer $f_1 = f_2$.

(d) Soit f qui vérifie $(**)$. Alors, pour $x \in [0, a]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right] = f\left(\frac{x}{2^0}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

(e) Soit f qui satisfait $(**)$. Fixons x dans $[0, a]$. On vient de prouver

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right) \quad \heartsuit.$$

On suppose de surcroît que f est dans S. Alors puisqu'elle est continue et nulle en 0 d'après la première question du problème, on a, $f(x/2^n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0) = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $\heartsuit$, on obtient

$$f(x) = 0 + u(x).$$

On vient de prouver que si une fonction de S satisfait $(**)$, alors elle ne peut être que égale à u. Or, nous avons prouvé que u est dans S (question B. 1.(c)) et qu'elle satisfait $(**)$ (question B.2.(a)). Il y a bien existence et unicité d'une solution à (*

3. Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Notons φ_α la fonction définie sur $[0, a]$ par $\varphi_\alpha(0) = 0$ et $\forall x \neq 0 \ \varphi_\alpha(x) = x^\alpha$.

(a) La fonction φ_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, a]$ (c'est le cas pour toute valeur de α). Puisque $\alpha \geq 1$, φ_α est de plus dérivable en 0 et sa dérivée y est continue. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$, ce qui suffisant pour appartenir à S (cf A.4).

(b) Soit f l'unique solution dans S de $(**)$. D'après les question 1 et 2,

$$\forall x \in [0, a] \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi_\alpha\left(\frac{x}{2^k}\right) = \lim_{n \to +\infty} x^\alpha \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2^\alpha)^k} = \frac{x^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}}.$$