Lycée Condorcet
PCSI

8 février 2025

DS7 mathématiques
Problèmes

3 heures

Une équation fonctionnelle

On appelle F l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (1) :

$$(1) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \quad \text{et} \quad f(x) \geq 0$$

Dans tout le problème f désignera une fonction vérifiant la relation (1).

On notera $\tilde{0}$ la fonction identiquement nulle définie sur $\mathbb{R}$.

Partie I : Quelques propriétés des éléments de F.

1. Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F.
2. Écrire ce que devient (1) dans chacun des cas suivants :

$$x = 0 \text{ et } y \text{ quelconque, } x \text{ quelconque et } y = 0, \ x = y$$

   Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
3. Montrer que $f(0) = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle (la fonction $\tilde{0}$).
4. On suppose que f s'annule pour une valeur réelle $a \neq 0$.
   On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{a}{2^n}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(U_n) = 0$.
   (b) En déduire que $f(0) = 0$.
5. Déduire des questions précédentes que f est soit égale à $\tilde{0}$ soit elle vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
6. Montrer que f est paire.

Partie II : Explicitation des éléments de F.

Soit G l'enemble des fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\exists f \in F\backslash\{\tilde{0}\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \ln(f(x)).$$

On note g une fonction de G et $\lambda = g(1)$.

1. Montrer à l'aide de la relation (1) vérifiée par f, que g vérifie la relation (2) :

$$(2) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$$

2. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.
   (a) Montrer à l'aide de la relation (2), $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; g(nx) = n^2 g(x)$.
   (b) En déduire la relation : $\quad \forall n \in \mathbb{Z} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; g(nx) = n^2 g(x)$.
   (c) Enfin montrer que : $\quad \forall r \in \mathbb{Q} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; g(rx) = r^2 g(x)$.
   On pourra remarquer qu'un rationnel est un quotient d'entiers.
   Puis que
   $$\forall r \in \mathbb{Q} \quad g(r) = \lambda r^2$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
   (b) En déduire une forme explicite de g.
   (c) Puis une forme explicite de f.

Matrices magiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice magique** si et seulement si, il existe un réel $\sigma(M)$ tel que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \\ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,i} = \sigma(M), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,n-i+1} = \sigma(M) \end{cases}$$

Autrement dit une matrice magique est une matrice dont toutes les sommes des coefficients sur chaque ligne, toutes les sommes des coefficients sur chaque colonne, et des éléments sur les deux diagonales sont égales.

Partie I : Matrices magiques de taille 3×3.

On se place dans cette partie dans l'ensemble des matrices carrées réelles de taille 3 (ici $n = 3$).
On considère, de plus, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A, B C et F sont magiques et que $A + B = -2F$.
2. Montrer que la somme de deux matrices magiques est une matrice magique, que la transposée d'une matrice magique est une matrice magique et que le produit par un scalaire d'une matrice magique est encore une matrice magique.
3. On étudie le lien entre matrice magique et matrice symétrique ou matrice antisymétrique.
   (a) Justifier que toute matrice antisymétrique peut s'écrire sous la forme

   $$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   où α, β et γ sont trois réels.
   En déduire que l'ensemble des matrices magiques antisymétriques est l'ensemble :

   $$\{\alpha(A + F) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

   (b) Exprimer les matrices magiques symétriques telles que $\sigma(M) = 0$ (celles dont les sommes des éléments sur chaque ligne, sur chaque colonnes et les diagonales sont nulles) en fonction de F.
   (c) En déduire que l'ensembles des matrices magiques symétriques est l'ensemble :

   $$\{\lambda C + \mu F \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

4. (a) Montrer, par analyse synthèse, que toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique et que ce couple est unique.

(b) Montrer que si M est une matrice magique, la matrice symétrique M' et la matrice antisymétrique M'' telles que
$$M = M' + M''$$
sont elles aussi des matrices magiques.

(c) Déduire des questions précédentes que l'ensemble des matrices magiques est l'ensemble :
$$\{\lambda A + \beta B + \gamma C \mid (\lambda, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$$

5. On étudie maintenant l'effet du produit sur les matrices magiques.
   (a) Calculer A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB. Lesquelles de ces différentes matrices sont magiques ?
   (b) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices magiques soit magique ? En déduire toutes les matrices magiques produits de deux matrices magiques.
   (c) Véfifier que le produit d'une matrice magique et d'une matrice de la forme $\lambda C + \mu I$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ est une matrice magique.
   (d) Vérifier que les puissances paires d'une matrice magique ne sont, en général, pas magiques mais que les puissances impaires sont toujours magiques.

Partie II : Matrices magiques en dimension 4

On se place dans cette partie dans l'ensemble des matrices carrées de taille 4.
Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est magique.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I_4 (la matrice identité de taille 4).
3. Montrer que, pour tout entier p, il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que
$$A^p = a_p A + b_p I_4.$$
   On ne demande pas de calculer ces entiers.
4. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, la matrice A^p n'est pas magique.

Partie III : Matrices semi-magiques en dimension n

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **semi-magique** si et seulement si il existe un réel $\sigma(M)$ tel que :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!] & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \\ \forall j \in [\![1, n]\!] & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \end{cases}$$

Autrement dit une matrice est semi magique si et seulement si les sommes des coefficients de chaque ligne et les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.
Notons J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Montrer qu'une matrice A est semi-magique si et seulement si $AJ_n = J_n A = \lambda J_n$.
   Exprimer ce λ en fonction de $\sigma(A)$.

2. Montrer que le produit de deux matrices semi-magiques est encore une matrice semi-magique.
   Et que si A et B sont deux matrices semi-magiques alors

$$\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$$

3. Soit A une matrice semi-magique.
   (a) On suppose que A est inversible. Montrer que $\sigma(A) \neq 0$ que A^{-1} est encore une matrice semi-magique et que
   $$\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$$
   (b) Réciproquement, on suppose que $\sigma(A) \neq 0$. Peut-on conclure que A est inversible ? On raisonnera d'abord en dimension 2 puis en bonus en dimension quelconque.