Lycée Condorcet — Février 2024
PCSI

Calcul matriciel 2

Dans cette feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Opérations élémentaires d'une matrice

Exercice 1.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer l'unique matrice R échelonnée réduite en lignes équivalente par lignes à A. Expliciter la matrice E, produit de matrices élémentaires, telle que $EA = R$.

Rang et calculs d'inverses

Exercice 2.
Calculer le rang des matrices suivantes et, quand il existe, leur inverse :
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
Calculer s'il existe l'inverse des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, B est la matrice carrée de taille n triangulaire supérieure n'ayant que des 1 au dessus et sur la diagonale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.
Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

Soient $M = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. Sans calcul, justifier que D est inversible et expliciter D^{-1}.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
4. Justifier que M est inversible et que $M^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Expliciter M^{-1}.

Exercice 6.

En discutant suivant le paramètre α calculer le rang de ces matrices et si la matrice est inversible calculer son inverse.

a) soit $\alpha \in \mathbb{C}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \overline{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ | b) soit $\alpha \in \mathbb{R}$ $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ | b) soit $\alpha \in \mathbb{R}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$ |

Exercice 7.

Pour quelles valeurs des paramètres a et b les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & a^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 2b & 2 \\ 2 & -ab & 2 \\ 2 & 2b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 8. (*)

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est somme de deux matrices inversibles.

Exercice 9. (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer le rang de la matrice carrée de taille n, A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [A]_{i,j} = \cos(i+j-2)$$

Exercice 10. (*) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.