Lycée Condorcet Février 2025
PCSI

Dérivation

1 Dérivabilité

Exercice 1.
Déterminer l'ensemble E des points de $\mathbb{R}$ où la fonction f est dérivable, et calculer f' sur E, dans les cas suivants :

a) $f : x \longmapsto 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 7x + \sqrt{2}$, b) $f : x \longmapsto \cos(3x+4)$, c) $f : x \longmapsto \sqrt{x}e^x$,

d) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$, e) $f : x \longmapsto \exp\left(x^{5/2}\right)$, f) $f : x \longmapsto -\ln|\cos x|$,

g) $f : x \longmapsto x\sin(2^x)$, h) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x+5)+\exp(\cos x)}{x+3}$, i) $f : x \longmapsto x\tan(x^2)$,

j) $f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$, k) $f : x \longmapsto \left| \begin{array}{l} x^2\ln(x^2) \ \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$ (f est-elle de classe C^1 ?),

l) $f : x \longmapsto \tan(\sin x)$.

Exercice 2.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{2x-x^2}$. Déterminer son ensemble de définition. Puis, étudier la continuité et la dérivibabilité de f.

Exercice 3.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la continuité, la dérivabilité de la fonction f_α définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left| \begin{array}{l} |x|^\alpha \sin(\frac{1}{x}) \ \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$$

puis regarder si la fonction est de classe C^1.
Faire de même avec les fonctions :

$$a(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(2x^2)-1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x+1}\right) & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, \ -x \in I$.
   Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable.
   Montrer que si f est paire (resp. impaire) alors f' est impaire (resp. paire).
2. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application T-périodique et dérivable.
   Montrer que f' est T-périodique.

2 Fonction réciproque

Exercice 6.
Soit f la fonction définie sur $[e, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Montrer que f est bijective de $[e, +\infty[$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à préciser puis étudier la dérivabilité de la fonction réciproque g. Exprimer alors g' sans logarithme népérien.

Exercice 7.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
2. Prouver que la fonction sinus définit une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle que l'on déterminera.
3. On note g sa fonction réciproque. Dresser le tableau de variations de g.
4. Déterminer alors l'ensemble de dérivabilité de g puis dessiner sur un même graphique l'allure de la courbe du sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et l'allure de g.
5. (a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\cos^2\big(g(x)\big) = 1 - x^2$.

   (b) Montrer alors que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3 Rolle et accroissements finis

Exercice 8. Règle de l'hopital
Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux applications définis sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que pour tout $x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(a) - f(b)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. On commencera par justifier que le membre de gauche est bien défini et on pourra considérer $f - \lambda g$, avec λ un réel bien choisi.
2. En déduire que si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ quand x tend vers a^+, $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ aussi.
3. **Application.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Exercice 9. Théorème de Darboux.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).

1. On suppose qu'il existe a, $b \in I$ tels que $f'(a) < 0 < f'(b)$.

   (a) On suppose $a < b$ (resp. $b > a$). Justifier que f admet un minimum sur $[a, b]$ (resp. un maximum sur $[b, a]$), et que cet extremum est atteint sur $]a, b[$.

   (b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soient a, $b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.
3. En déduire que l'image $f'(I)$ de l'intervalle I par f' est un intervalle (la fonction f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires même si elle n'est pas forcément continue).

Exercice 10.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x \leq e^x - 1 \leq xe$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 11.
Montrer par deux méthodes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $0 \leq a < b$, on a

$$(n+1)a^n < \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n.$$

Exercice 12.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in [a,b],\ f(x) \neq 0$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 13.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Montrer que f est lipschitzienne.

4 Suites et accroissements finis

Exercice 14.
Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

1. Applique l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1,k]$ à la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par
$$f(x) = -\frac{1}{x}.$$
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Exercice 15.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq u_n$.
   (b) Montrer alors que la suite u converge.
3. **Variante** On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 16.
On veut déterminer une valeur approchée de l'unique solution négative de l'équation (E) : $e^x = 3 + 2x$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^-$ puis justifier que $-2 \leq \alpha \leq -1$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 3}{2}$.
   (a) Résoudre l'équation de point fixe $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}^-$.

(b) Justifier que $\forall x \in]-\infty, 0]$ et $\left|g'(x)\right| \leq \frac{1}{2^n}$.

3. On définit la suite u par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leq 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
   puis que $\quad |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
   (c) En déduire que la suite u converge vers α.
   (d) Écrire une fonction Python qui prend en entrée un réel positif ϵ et qui qui renvoie une valeur approchée de α à ϵ près.

Exercice 17.
On considère la fonction f et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2+x} \end{array} \qquad \begin{array}{l} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n} \end{array}$$

1. Montrer que u_n existe et $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) = x$.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - (-1+\sqrt{2})\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - (-1+\sqrt{2})\right|$$
4. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.