Lycée Condorcet   Février 2025
PCSI

Dérivation (2)

1 Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Exercice 1.

Soit $n > 2$, montrer que l'application ϕ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x^2+1)e^{3x} \end{array}$$

est de calasse $\mathcal{C}^n$ et calculer sa dérivée n-ième.

Exercice 2.
Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de :

$$a) \;\; f_1 : x \mapsto \cos^3 x; \qquad b) \;\; f_2 : x \mapsto e^x \sin x \qquad c) \;\; x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$$

Exercice 3.
Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

1. Calculer la dérivée k-ième de $x \mapsto x^{n-1}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Exercice 4.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^n(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$
et tel que
$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)$$
2. Chercher une équation différentielle simple liant f et f'. En appliquant alors la formule de Leibniz, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \forall x \in R, \; P_{n+1}(x) + (2n+1)xP_n(x) + n^2(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$$
Puis
$$P_n' = -n^2 P_{n-1}.$$
3. Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Fonctions convexes

Exercice 5.
Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a :

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 6. Inégalité de Bernoulli
Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$,
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 7.
Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 8.

1. Étudier la convexité concavité de l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.
2. En déduire que, pour tous $x_1, \cdots, x_n \geq 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+(x_1 \cdots x_n)^{1/n}}$$

Exercice 9.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right)^{1/n}.$$
3. En déduire que, pour tout $(x_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, alors
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{1/n}$$