Lycée Condorcet Février 2025
PCSI

Dérivation (2)

1 Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Exercice 1.

Soit $n > 2$, montrer que l'application ϕ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x^2+1)e^{3x} \end{array}$$

est de calasse $\mathcal{C}^n$ et calculer sa dérivée n-ième.

Exercice 2.
Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de :

$$a)\ \ f_1 : x \mapsto \cos^3 x; \qquad b)\ \ f_2 : x \mapsto e^x \sin x \qquad c)\ \ x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$$

Exercice 3.
Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

1. **Calculer la dérivée k-ième de $x \mapsto x^{n-1}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.**
2. **En déduire la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.**

Corrigé :

1. Notons f et g les fonctions définies pour tout $x \in]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^{n-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x)$$

Soit $n > 1$, montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'assertion

$$P(k) : \forall x \in]-1,+\infty[\ \ f^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k} \quad \text{et } g^k(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

est vraie.
On a, pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = (n-1)x^{n-2} = \frac{(n-1)!}{(n-2)!}x^{n-1-1} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^2\frac{0!}{(1+x)^1}$$

Ainsi $P(1)$ est vraie.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons $P(k)$ vraie.
Soit $x \in]-1,+\infty[$, a alors

$$f^{(k+1)}(x) = f^{(n)'}(x) = \frac{(n-1)!(n-1-k)}{(n-1-k)!}x^{n-1-k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k+1))!}x^{n-1-(k+1)}$$

$$g^{(k+1)}(x) = g^{(n)'}(x) = (-1)^{k+1}\frac{-k(k-1)!}{(x+1)^{k+1}} = (-1)^{k+2}\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$$

Ainsi $P(k+1)$ est vraie.
Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[\ \ f^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k} \quad \text{et } g^k(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}}$$

2. Notons que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a

$$f^{(n)}(x) = 0$$

Ainsi d'après la formule de Leibniz on a, pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!} x^{k-1} \\
&= (n-1)! \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^{k-1}}{(1+x)^k}
\end{aligned}$$

Ainsi si $x = 0$ alors $(fg)^{(n)}(0) = n!$ (*Tous les termes de la somme sont nuls sauf pour* $k = 1$).
Et si $x \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)}(x) &= -\frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-x}{1+x}\right)^k \\
&= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-x}{1+x}\right)^k\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^n\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 4.
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

   et tel que, pour tout entier n, pour tout réel x, on a la relation de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)$$

2. **Chercher une équation différentielle simple liant f et f'. En appliquant alors la formule de Leibniz, montrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in R, \ P_{n+1}(x) + (2n+1)xP_n(x) + n^2(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

   Puis

$$P_n' = -n^2 P_{n-1}.$$

3. **Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

Corrigé :

1. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto 1+x^2$ étant à valeurs dans $[1,+\infty[$ et étant aussi $\mathcal{C}^\infty$ alors par composition la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi par composition f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $A(n)$ l'assertion

$$A(n) : \text{" il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\text{"}$$

En prenant $P_0 = 1$ on a bien
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{P_0(x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+0}}$$
Ainsi $A(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $A(n)$ vraie. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(1+x^2)^{(n+\frac{1}{2})}P_n'(x) - 2x(n+\frac{1}{2})(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}}P_n(x)}{(1+x^2)^{2(n+\frac{1}{2})}} \\ &= \frac{(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}}\left[(1+x^2)P_n'(x) - x(2n+1)P_n(x)\right]}{(1+x^2)^{2n+1}} \\ &= \frac{(1+x^2)P_n'(x) - x(2n+1)P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Et comme P_n est un polynôme alors $(1+x^2)P_n'(x) - x(2n+1)P_n(x)$ est un polynôme.
Ainsi si $A(n)$ est vraie alors $A(n+1)$ est vraie. On a de plus

$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - x(2n+1)P_n(x)$$

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}}$$

et on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - x(2n+1)P_n(x)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$xf(x) = -(1+x^2)f'(x)$$
On applique alors la formule de Leibniz aux deux membres de cette égalité, et comme la dérivée seconde de l'application $x \mapsto x$ et la dérivée troisième de l'application $x \mapsto 1+x^2$ sont nulles on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) = -(1+x^2)f^{(n+1)}(x) - n2xf^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x)$$

On a donc
$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x) = 0$$
Ainsi d'après la question précédente on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x^2)\frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} + (2n+1)x\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} + n^2\frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n-1+\frac{1}{2}}} = 0$$

Ainsi en simplifiant et réduisant au même dénominateur on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad P_{n+1}(x) + (2n+1)xP_n(x) + n^2(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le résultat montré dans cette question et celui de la question précédente on a :

$$(1+x^2)P_n'(x) - x(2n+1)P_n(x) = -n^2(1+x^2)P_{n-1} - (2n+1)xP_n(x) \iff (1+x^2)P_n'(x) = -n^2(1+x^2)P_{n-1}$$

Mais pour tout $x \in \mathbb{R}$ $1+x^2 \neq 0$ d'où

$$\boxed{P_n'(x) = -n^2 P_{n-1}(x)}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 1, en évaluant en 0 la relation de récurrence entre les polynômes on obtient :

$$P_{n+1}(0) = P_n'(0)$$

Mais d'après la question 2, toujours en évaluant en 0 on a :

$$P_n'(0) = -n^2 P_{n-1}(0)$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(0) = -n^2 P_{n-1}(0)$$

Notons que $P_0(0) = 1$ et $P_1(0) = 0$.
La relation établie ci-dessus permet alors de démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P_{2n}(0) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (2n-1)^2 \quad \text{et} \quad P_{2n+1}(0) = 0}$$

2 Fonctions convexes

Exercice 5.
Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a :

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 6.
Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 7.
Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Correction :
Pour la première inégalité, on utilise le fait que le graphe d'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes. On l'utilise avec la tangente en $\frac{a+b}{2}$. Ainsi on a, pour tout $t \in [a, b]$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) \leq f(t)$$

Ainsi comme $a \leq b$ et par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Mais

$$\begin{aligned}
f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\left(t - \tfrac{a+b}{2}\right) &= \left[f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) t - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\left(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{a+b}{2} t\right)\right]_a^b \\
&= f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)(b-a) - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\left(\tfrac{b^2-a^2}{2} - \tfrac{a+b}{2}(b-a)\right) \\
&= f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)(b-a)
\end{aligned}$$

On trouve bien ainsi

$$\boxed{(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}$$

Pour la deuxième inégalité on utilise la définition de la convexité.
Notons tout d'abord que l'application qui φ à $\lambda \in [0,1]$ associe $\lambda a + (1-\lambda)b$ est une bijection de $[0,1]$ à valeur dans $[a,b]$ (sa réciproque est l'application qui à $t \in [a,b]$ associe $\frac{a-t}{a-b}$). On va alors procéder au changement de variables $t = \phi(\lambda)$ rappelons que l'on a alors ($\mathrm{d}t = a - b \ \mathrm{d}\lambda$). D'où

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(0)} f(t) \ \mathrm{d}t \\
&= \int_1^0 f(\varphi(\lambda))(a-b) \ \mathrm{d}\lambda \\
&= (b-a) \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b) \ \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

Or comme f est convexe pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Ainsi, comme $0 \leq 1$, par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b) \ \mathrm{d}\lambda \leq \int_0^1 \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \ \mathrm{d}\lambda$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \ \mathrm{d}\lambda &= \left[\tfrac{\lambda^2}{2} f(a) + (\lambda - \tfrac{\lambda^2}{2}) f(b)\right]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{2} f(a) + \tfrac{1}{2} f(b)
\end{aligned}$$

Et comme $b-a$ est positif, on a donc bien l'inégalité

$$\boxed{\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

Exercice 8.

1. **Étudier la convexité concavité de l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.**
2. **En déduire que, pour tous $x_1, \cdots, x_n \geq 1$, on a**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+(x_1 \cdots x_n)^{1/n}}$$

Corrigé :

1. Notons f l'application définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe $\dfrac{1}{1+e^x}$. Elle est deux fois dérivable. En calculant la dérivée seconde et en en étudiant le signe on montre que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$ (le point 0 est donc un point d'inflexion).
2. Nous allons utiliser la convexité de f sur $\mathbb{R}_+$.
   Notons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$
   $$y_i = \ln(x_i)$$
   Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \geq 1$ alors $\ln(x_i) \geq 0$ et donc $y_i \geq 0$.
   L'application f étant convexe sur $\mathbb{R}_+$ la formule de Jensen donne alors
   $$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(y_i)$$

Or on a les égalités :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} y_i\right) &= \frac{1}{1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}} \\ &= \frac{1}{1+(x_1\cdots x_n)^{1/n}} \end{aligned}$$

Et par ailleurs

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i}$$

L'inégalité de Jensen donne donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{1}{1+(x_1\cdots x_n)^{1/n}}$$

Et comme n est positif on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{n}{1+(x_1\cdots x_n)^{1/n}}}$$

Exercice 9.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$$1+\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{1/n}.$$
3. En déduire que, pour tout $(x_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, alors
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{1/n}$$