Ex 9 (rédigé)

1) a) Remarquons que f est continue sur $[a,b]$ ou $[b,a]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum sur $[a,b]$ ou $[b,a]$

Supposons que $a<b$. Montrons que le minimum de f sur $[a,b]$ appartient à $]a,b[$.

1er cas: Supposons que $f(a) \leq f(b)$. Montrons que $f(a)$ n'est pas le minimum de f sur $[a,b]$.

L'application f est dérivable en a et $f'(a)<0$ donc:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^+]{} f'(a) < 0$$

Donc il existe $x \in]a,b[$ tel que:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$$

Or $x-a>0$ d'où: $f(x)-f(a)<0$ soit $f(x)<f(a)$

2e cas: Supposons que $f(b) \leq f(a)$. Mq: $f(b) \neq \min(f([a,b]))$

L'application f est dérivable en b et $f'(b)>0$ donc:

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \xrightarrow[x \to b^-]{} f'(b) > 0$$

Donc il existe $x \in]a,b[$ tel que:

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$$

Or $x-b<0$ donc $f(x)-f(b)<0$ et $f(x)<f(b)$

Ainsi le minimum de f sur $[a,b]$ est en $m \in]a,b[$

Respectivement, supposons que $b<a$ et montrons que le maximum de f sur $[a,b]$ est en $M \in]a,b[$

Supposons d'abord que $f(b) \geq f(a)$. Montrons que:

$f(b) \neq \max(f([b,a]))$.

L'application f est dérivable en b et $f'(b)<0$ donc il existe $x \in]b,a[$ tel que:

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$$

Or $x-b>0$ donc $f(x)-f(b)>0$ et $f(x)>f(b)$

On montre de façon qu'il existe $x \in]b,a[$ tel que $f(x)>f(a)$ pour $f(a) \geq f(b)$.

Ainsi le maximum de f sur $[b,a]$ est en $M \in]b,a[$.

b) La fonction f admet donc toujours un extremum de $[a,b]$ dans $]a,b[$. Cet extremum est donc local et, si on note $c \in]a,b[$ l'abscisse de cet extremum, f est dérivable en c et:

$$f'(c)=0$$

(proposition 15 du cours)

2) Soit $g: [a,b] \text{ ou } [b,a] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)-\lambda x$.

Par combinaison linéaire, g est dérivable sur $[a,b]$ ou $[b,a]$ et:

$\forall x \in [a,b]$ ou $[b,a]$, $g'(x)=f'(x)-\lambda$

Or:

$$f'(a) < \lambda < f'(b)$$

$$\iff g'(a) < 0 < g'(b)$$

Donc d'après la question précédente, il existe $c \in]a,b[$ ou $]b,a[$ tel que:

$$g'(c)=0 \quad \text{soit} \quad f'(c)=\lambda$$

3) Montrons que $f'(I)$ est un intervalle.

Soit $(A,B,\lambda) \in (f'(I))^2 \times \mathbb{R}$.

Supposons que $A \leq \lambda \leq B$.

1er cas: Si $\lambda=A$, $\lambda \in f'(I)$

2e cas: Si $\lambda=B$, $\lambda \in f'(I)$

3e cas: Si $A<\lambda<B$.

Comme $(A,B) \in (f'(I))^2$, il existe $(a,b) \in I^2$ tel que: $f'(a)=A$ et $f'(b)=B$.

On a donc:

$$f'(a) < \lambda < f'(b)$$

D'après la question précédente, il existe $c \in I$ tel que:

$$f'(c)=\lambda$$

Ainsi $\lambda \in f'(I)$.

On a donc:

$$\forall (A,B,\lambda) \in (f'(I))^2 \times \mathbb{R},\ A \leq \lambda \leq B \implies \lambda \in f'(I)$$

L'ensemble image $f'(I)$ est donc bien un intervalle.

Exercice 9 (rédigé)

1) a) Remarquons que f est continue sur [a,b] ou [b,a] donc, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe un minimum et un maximum sur [a,b] ou [b, a].

Supposons que a < b. Montrons que le minimum de f sur [a, b] appartient à] a, b [.

1er cas : supposons que f(a) ≤ f (b). Montrons que f(a) n'est pas le minimum de f sur [a, b]. L'application f est dérivable en a et:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^+]{} f'(a) < 0$$

Donc il existe $x \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$$

Or $x - a > 0$ donc $f(x)-f(a) < 0$ et $f(x) < f(a)$

Donc $f(a)$ n'est pas le minimum.

2e cas : Supposons que f (b) ≤ f (a). Montrons que:

f (b) ≠ min (f ([a,b])).

L'application f est dérivable en b et:

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \xrightarrow[x \to b^-]{} f'(b) > 0$$

Donc il existe $x \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$$

Or $x - b < 0$ donc $f(x)-f(b) < 0$ et $f(x) < f(b)$

Donc $f(b)$ n'est pas le minimum

Ainsi le minimum de f sur [a,b] est en $m \in]a, b[$.

Respectivement, supposons que b<a et montrons que:

Le maximum de f sur [a,b] est en $M \in]a,b[$.

Supposons d'abord que f (b) ≥ f (a). Montrons que :

f (b) ≠ max (f ([b, a]))

L'application f est dérivable en b et:

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \xrightarrow[x \to b^+]{} f'(b) > 0$$

donc il existe $x \in]b, a[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$$

Or $x - b > 0$ donc $f(x)-f(b) > 0$ et $f(x) > f(b)$

On montre de façon analogue qu'il existe $x \in]b,a[$ tel que f(x)>f(a) pour f(a)>f(b).

Ainsi le maximum de f sur [b,a] est en $M \in]b,a[$.

b) La fonction f admet donc toujours un extremum local de [a, b] dans] a, b[. Si on note $c \in]a, b[$ l' abscisse de cet extremum, f est dérivable en c et :

$$f'(c) = 0$$

(proposition 15 du cours)

2) Soit g : [a, b] → R

$$x \mapsto f(x) - \lambda x$$

.Par combinaison linéaire, g est dérivable sur [a, b] ou [b, a] et :

$$\forall x \in [a,b] \text{ ou } [b,a],\ g'(x) = f'(x) - \lambda$$

Or :

$$f'(a) < \lambda < f'(b)$$

d'où:

$$g'(a) < 0 < g'(b)$$

Donc d'après la question précédente, il existe c] a, b [ou] b. a[tel que :

$$g'(c) = 0 \quad \text{soit} \quad f'(c) = \lambda$$

3) Montrons que f'(I) est un intervalle.

Soit $(A,B,C) \in I^2 \times \mathbb{R}$. Supposons que A ≤ C ≤ B.

1er cas : Si C = A, $C \in f'(I)$

2e cas: Si C = B, $C \in f'(I)$

3e cas : Si A < C < B. Comme (A,B) ∈ f'(I), il existe $(a,b) \in I^2$ tel que :

$$f'(a) = A \quad \text{et} \quad f'(b) = B$$

On a donc :

f'(a) < C < f'(b)

D'après la question précédente, il existe $c \in I$ tel que :

$$f'(c) = C$$

Ainsi:

$$C \in f'(I)$$

L'ensemble image f ' (I) est donc bien un intervalle.