

Dérivation (2)

Exercice 5

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], f'(x) = \cos(x)$$

$$\text{et } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], f''(x) = -\sin(x)$$

$$\text{Or } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq 0, \text{ donc } f''(x) \leq 0$$

Ainsi \sin est concave sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

Comme f est concave, elle est en-dessous de ses tangentes, en particulier sous sa tangente en 0 :

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$y_0 = \cos(0)(x-0) + \sin(0) = x$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \sin(x) \leq x$$

De plus, comme f est concave, elle est au-dessus de ses cordes, en particulier la corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad y = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} (x-0) + \sin(0)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], y = \frac{2}{\pi} \cdot x$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$