Exercice 12 :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [a,b], f(x) \neq 0$

Supposons que :
- f est continu sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$

Considérons l'application :

$$g : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln\left(\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) \end{array}$$

Puisque pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \neq 0$:
- l'application g est continu sur $[a,b]$ par composée d'applications continues
- l'application g est dérivable sur $]a,b[$ par composée d'applications dérivables. Car l'application valeur absolue est dérivable sur R*

Ainsi, d'après l'égalité des accroissements finis :

$\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$g(b) - g(a) = (b-a)\, g'(c)$$

$$\iff \ln\left(\left|\frac{1}{f(b)}\right|\right) + \ln(|f(a)|) = (b-a)\left(-\frac{f'(c)}{f(c)}\right)$$

$$\iff \ln\left(\left|\frac{f(a)}{f(b)}\right|\right) = (a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}$$

Or $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \neq 0$.
Ainsi $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, d'où

Comme f est continue.
Pour le déduire on utilise la contraposée du thm des valeurs intermédiaires.

$$\left|\frac{f(a)}{f(b)}\right| = \frac{f(a)}{f(b)}$$

Ainsi :

$\exists c \in]a, b[$ tel que :

$$\boxed{\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}}$$