Dérivation :

Exercice 6 :

Soit $x \in [e,+\infty[$,

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

f est continue sur $[e,+\infty[$ comme quotient d'applications continues.

L'application f est dérivable comme quotient d'applications dérivables sur $[e;+\infty[$, on obtient :

$\forall x \in [e;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

et pour tout $x \geqslant e$, $\ln(x) \geqslant 1$ donc

$f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [e;+\infty[$

Ainsi f est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$

De plus,

$$f(e) = \frac{1}{e}$$

et $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$

On a donc $f([e;+\infty[) =]0;\frac{1}{e}]$ et comme f est continue et strictement décroissante on a $f : [e;+\infty[\longrightarrow]0;\frac{1}{e}]$ est bijective et sa réciproque $g :]0;\frac{1}{e}[\longrightarrow [e,+\infty[$ est continue et ne s'annule jamais.

Il ne faut pas oublié de vérifier que pour tout x \in [e,+\infty[f'(x) est différent de 0 !

Comme f est strict monotone et dérivable sur $[e;+\infty[$, g est dérivable sur $]0;\frac{1}{e}]$ selon, pour tout $y \in]0,\frac{1}{e}]$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

D'où :

$$g'(y) = \frac{g^2(y)}{1 - \ln(g(y))}$$

Or comme g est la fonction réciproque de f on a :

$\forall y \in]0; \frac{1}{e}]$,

$$f(g(y)) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(g(y))}{g(y)} = y$$

$$\Leftrightarrow \ln(g(y)) = y\,g(y)$$

On obtient alors pour tout $y \in]0; \frac{1}{e}]$

$$g'(y) = \frac{g^2(y)}{1 - y\,g(y)}$$