Lycée Condorcet
PCSI

Février 2025

Fonctions absolument monotones

Dans ce problème, I est un intervalle et r un réel strictement positif.

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est **absolument monotone sur** I si la fonction $f^{(n)}$ est positive sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, la fonction exponentielle est absolument monotone sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions réelles absolument monotones sur I sera noté $\mathcal{A}(I)$.

Pour tout $f \in \mathcal{A}(I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$ on note $\Delta_{f,n}(x)$ le réel :

$$\Delta_{f,n}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

1. Montrer que $\mathcal{A}(I)$ est stable par dérivation, c'est à dire que : $\quad \forall f \in \mathcal{A}(I), \quad f' \in \mathcal{A}(I)$.
2. Pour quelles valeurs du réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. (a) Montrer que la fonction f définie par $x \mapsto -\ln(1-x)$ est absolument monotone sur $[0,1[$ et calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note ϕ_n la fonction $x \mapsto \ln(1-x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ et ψ_n la fonction $x \mapsto \phi_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ sur $[0,1[$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, factoriser ϕ_n' et ψ_n'.

   (c) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$,

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x)$$

4. Montrer que $\mathcal{A}(I)$ est stable par produit : $\qquad \forall (f,g) \in \mathcal{A}(I)^2 \quad fg \in \mathcal{A}(I)$

Dans les question 5. à 8, on étend à toutes les fonctions absolument monotones le résultat de la question 3.c) relatif à la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$.

5. (a) Pour tout $f \in \mathcal{A}(I)$, exprimer $\Delta'_{f,n+1}$ en fonction de $\Delta_{f',n}$.

   (b) En déduire que, pour tout $f \in \mathcal{A}([0,r[)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{f,n}$ est positive sur I

6. Soit $\lambda \geq 1$.

   (a) Soit $f \in \mathcal{A}([0,r[)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante sur $]0,r[$, puis que, pour tout $x \in \left[0, \frac{r}{\lambda}\right[$: $\qquad \lambda \Delta_{f,0}(x) \leq \Delta_{f,0}(\lambda x)$.

   (b) Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{A}([0,r[)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{r}{\lambda}\right[$:

   $$\lambda^{n+1} \Delta_{f,n}(x) \leq \Delta_{f,n}(\lambda x)$$

7. Soit $f \in \mathcal{A}([0,r[)$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x,y) \in [0,r[^2$ tels que $x < y$:

   $$0 \leq \Delta_{f,n}(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. (c'est le théorème de Bernstein).

8. Soit $f \in \mathcal{A}(]-r, r[)$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) + f(-x)$ est absolument monotone sur $]0, r[$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in]-r, r[$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

9. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$

   et, pour tout $x \in]-1, 1[$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x)$.