Exercice 4 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, considerons l'application définie par :

$$f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f_α est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$

De plus,

$|x|^\alpha \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$ et $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée

Ainsi, $|x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$

f_α admet une limite à gauche et à droite en 0 valant 0 et $f_\alpha(0) = 0$ donc f_α est continue en 0.

f_α est alors continue sur $\mathbb{R}$.

f_α est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x^{\alpha - 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$

$$f_\alpha(x) = (-x)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \frac{(-x)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = -(-x)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Notons

$$g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x}$$

- Si $\alpha \leq 1$

Alpha >1.
Il faut traiter diffremment le cas alpha=1. On utilisera cette fois deux suites différentes.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$g(u_n) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)^{1-\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{1-\alpha}$$

$\frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \qquad 1-\alpha \geq 0 \quad$ donc $\quad g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

D'après la caractérisation sequentielle de la limite, si g admet une limite en 0, alors elle vaut $+\infty$

Ainsi, g n'admet pas de limite finie en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

- si $\alpha > 1$

$$x^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad -(-x)^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

$x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée donc $\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}]{} 0$

Ainsi, f_α est derivable en 0 et $f_\alpha'(0) = 0$.

Soit $\alpha > 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$f_\alpha'(x) = -\alpha(-x)^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - (-x)^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

f_α' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée, somme et produit de fonctions continues.

- Si $1 < \alpha \leq 2$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^{2-\alpha}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\alpha x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Notons

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$-\frac{1}{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^{2-\alpha}}\cos(2n\pi) = -(2n\pi)^{2-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Ainsi, $f_\alpha'(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Si f_α' admet une limite en 0 alors elle vaut $-\infty$
donc f_α' n'est pas continue en 0. f_α n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

- Si $\alpha > 2$

$f_\alpha'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}]{} 0$ et $f_\alpha'(0) = 0$ donc f_α' est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. f_α est de classe $\mathcal{C}^1$.

Ainsi, f_α est derivable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha > 1$ et f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ si $\alpha > 2$