Calcul matriciel (2)

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad , \quad [A]_{i,j} = \cos(i+j-2)$$

Rappelons que $\forall (a,b) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

d'où $\cos(a+b) - \cos(a)\cos(b) = -\sin(a)\sin(b) \quad (*)$

A est une matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(1) & \cos(2) & \cdots & \cos(n-1) \\ \cos(1) & \cos(2) & \cos(3) & \cdots & \cos(n) \\ \cos(2) & \cos(3) & \cos(4) & \cdots & \cos(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(n-1) & \cos(n) & \cos(n+1) & \cdots & \cos(2n-2) \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i - \cos(i-1)L_1$ pour $i \in [\![2;n]\!]$ et on obtient alors en simplifiant avec $(*)$:

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(1) & \cos(2) & \cdots & \cos(n-1) \\ 0 & -\sin(1)\sin(1) & -\sin(1)\sin(2) & \cdots & -\sin(1)\sin(n-1) \\ 0 & -\sin(2)\sin(1) & -\sin(2)\sin(2) & \cdots & -\sin(2)\sin(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\sin(n-1)\sin(1) & -\sin(n-1)\sin(2) & \cdots & -\sin(n-1)\sin(n-1) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - \cos(1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \cos(2)L_1 \\ \\ L_n \leftarrow L_n - \cos(n-1)L_1 \end{matrix}$$

Puis, pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, $\sin(i-1) \neq 0$ donc on effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i / \sin(i-1)$ et on obtient :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(1) & \cos(2) & \cdots & \cos(n-1) \\ 0 & -\sin(1) & -\sin(2) & \cdots & -\sin(n-1) \\ 0 & -\sin(1) & -\sin(2) & \cdots & -\sin(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\sin(1) & -\sin(2) & \cdots & -\sin(n-1) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 / \sin(1) \\ L_3 \leftarrow L_3 / \sin(2) \\ \\ L_n \leftarrow L_n / \sin(n-1) \end{matrix}$$

Sans perte d'information, on peut donc écrire que :

$$A \sim \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(1) & \cos(2) & \cdots & \cos(n-1) \\ 0 & -\sin(1) & -\sin(2) & \cdots & -\sin(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice A est au plus de rang 2.

Si $n=1$, $A = \begin{pmatrix} \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ donc A est de rang 1

Si $n \geqslant 2$, les deux premières lignes étant indépendantes, A est de rang 2.