BENOUTOUA
RAYAN

TD dérivation

Exercice 15

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

[k,k+1] --> R
x |--> ln(x)

Ce ne peut pas être la même variable (x et k !).

Soit $f : \begin{cases} [k, k+1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ k \mapsto \ln(k) \end{cases}$

L'application f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc aussi sur $[k, k+1]$ et $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(k) = \dfrac{1}{k}$

D'après l'égalité des accroissements finis,

$\exists c \in]k, k+1[$ tel que :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c}$$

Or, $c \in]k, k+1[$ d'où

$$k \leq c \leq k+1$$

L'application $k \mapsto \dfrac{1}{k}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ d'où

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{k}$$

soit $$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}}$

2)a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $P(n)$: " $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq U_n$ " est vraie.

Cette récurrence est correcte mais on pouvait plus simplement utiliser les inégalités démontrées dans la question précédente.

On obtient alors
Sum ln(k+1/k) -ln(n)<= u_n
puis on reconnaît une somme télescopique.

Initialisation :

$$U_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} - \ln(1) = 1$$

$U_1 = 1 \geq \ln(2)$
donc P_0 est vraie

Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie et déduisons-en $P(n+1)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

A écrire avant le P(n) !

Par définition de U_{n+1} :

$$U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

..

Comme $P(n)$ est supposée vraie, on a :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq U_n$$

soit $$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq U_{n+1}$$

d'où : $$\frac{1}{n+1} \leq U_{n+1}$$

Or on a montré en question 1 que $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

et comme $n+1 \in \mathbb{N}^*$, pour $k = n+1$ on a :

$$\frac{1}{n+1} \geq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

d'où $\boxed{U_{n+1} \geq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}$ par transitivité

<u>Conclusion</u> : Le principe de récurrence permet de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b)

D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (U_n) est minorée

Non !!!!!!
ln(n+1/n) dépend de n !!!!! Ce n'est donc pas un minorant !!!!!!!!

Par contre ln(n+1/n) est positif ! donc 0 est un minorant !

Montrons que (U_n) est décroissante :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1}$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$$

$$= -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}$$

Or, d'après la question 1, $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

d'où $\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0$ soit $U_{n+1} - U_n \leq 0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (U_n) est minorée et la suite est décroissante. D'après le <u>théorème de la limite monotone</u>, elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

3)

Considérons les suites
$(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$
$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

Montrons que u et v sont adjacentes.

- On a montré en 2b que u est décroissante, <u>montrons que v est croissante :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$ et comme d'après Q1 :

pour $k = n+1$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \geqslant \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

d'où

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geqslant 0$$

soit $V_{n+1} - V_n \geqslant 0$

Ainsi v est croissante.

• <u>Montrons que $u - v$ converge vers 0 :</u>

$$U_n - V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1)$$

$$U_n - V_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

d'où $U_n - V_n \sim \frac{1}{n}$

soit $U_n - V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

<u>Ainsi u et v sont adjacentes et convergent vers la même limite.</u>