BENWIDUA
RAYAN

Calcul Matriciel 2

Exercice 5 :

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

1) $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons que P est inversible :

$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$

$P \in M_3(\mathbb{K})$ et $rg(P) = 3$
Ainsi d'après le théorème H, P est inversible.

Explicitons P^{-1} :

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$PX = Y \iff \begin{cases} 3x - y = a & L_1 \\ x + y + z = b & L_2 \\ y + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - y = a \\ x = b - c & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b - c \\ y = -a + 3b - 3c \\ z = a - 3b + 4c \end{cases}$$

$\iff$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. Sans calcul, justifier que D est inversible et expliciter D^{-1}.

2)

On calcule la matrice MP :

$$MP = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$D \in M_3(\mathbb{R})$

La matrice D est échelonnée

et $rg(D) = 3$

D'après le théorème 17, $\boxed{\text{D est inversible}}$

Déterminons son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ainsi, $\boxed{D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

---

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ l'assertion $P(n)$: " $M^n = PD^nP^{-1}$ " est vraie.

<u>Initialisation</u> :

$M^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$

donc P_0 est vraie

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P(n)$ vraie et déduisons-en $P(n+1)$:

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

En multipliant par M à droite on a :

$$M^{n+1} = (PD^nP^{-1}) \times M$$

et comme $D = P^{-1}MP$ on en déduit $M = PDP^{-1}$

d'où :

$$M^{n+1} = (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1})$$

$= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}$ (par associativité du produit)

$= PD^nDP^{-1}$ (car $P^{-1}P = I_3$)

$M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ (par définition de la puissance d'une matrice)

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$

4. Justifier que M est inversible et que $M^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Expliciter M^{-1}.

On peut faire plus simple pour justifier que M est inversible.
On a montré que M=PDP^{-1}, or P et P^{-1} sont inversibles et D aussi. Ainsi M est un produit de matrice inversible, elle est inversible.

4. $M = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 0 & -26 & 28 \\ 0 & -27 & 29 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 0 & -26 & 28 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{26} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{27}{26} L_2$

$M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $rg(M) = 3$
La matrice M est inversible.

On sait que $M = PDP^{-1}$
d'où $M^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

Ainsi $\boxed{M^{-1} = PD^{-1}P^{-1}}$

On a $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (énoncé)

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (question 2)

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (question 1)

$$PD^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3/2 & -7/2 & 4 \\ 3/2 & -9/2 & 5 \end{pmatrix}}$