Exercice 7 Dérivation

Question 1 :

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est la fonction cosinus et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\cos(x)| \leq 1$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x) - \sin(0)| \leq 1 \times |x - 0|$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x)| \leq |x|$$

Question 2 :

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Or sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ cos est strictement positive donc sin est strictement croissante et donc sin est bijective de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans]-1,1[

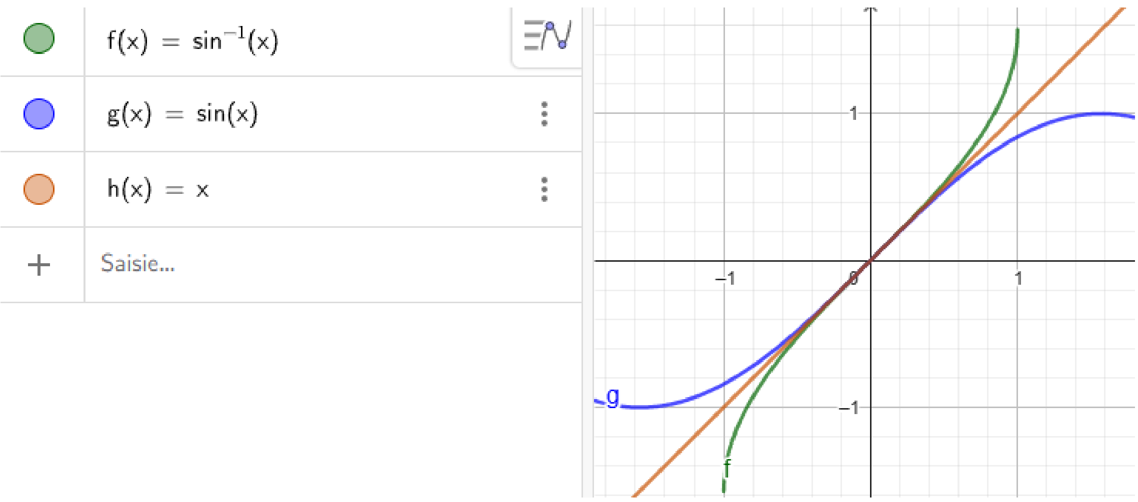
Question 3 :

Comme sin est stricetement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ alors g l'est aussi sur]-1,1[.
Tableau de variation :

x	-1		1
$g(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Question 4 :

Comme cos ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ alors g est dérivable sur]-1,1[et on dessine g en sachant que sa courbe représentative est symétrique à celle de sin par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Question 5a :

Soit $x \in]-1,1[$ on a :

$$\sin^2(g(x)) + \cos^2(g(x)) = 1$$

D'où :

$$\cos^2(g(x)) = 1 - x^2 \tag{1}$$

Question 5b :

Soit $x \in]-1,1[$, g est dérivable et comme cos ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a :

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(g(x))}$$

Or d'après (1) on a :

$$\cos(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

D'où :

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$