Lycée Condorcet Février 2025
PCSI

Étude asymptotique des fonctions et des suites réelles (2)

Table des matières

1 Développements limités

1.1 Définition

Soit $x_0 \in I$.

Définition 1.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des coefficients $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour $x \in I$:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big).$$

Méthode.

Avec les même notation que la définition précédente, un développement limité en 0 donnera donc :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\big(x^n\big).$$

Exemple 1

Nous avons montré au chapitre précédent que :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x), \quad \tan x \underset{x\to 0}{=} x + o(x), \quad \cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Les deux premières égalités sont respectivement les développements limités à l'ordre 1 en 0 sin et tan. La troisième est le développement limité de cos à l'ordre de 2 en 0.

• **Remarque.**
Bien souvent, on se ramènera à des développements limités au voisinage de 0.

Proposition 2.

1. Si f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n, alors pour tout $p \leq n$, f admet un développement limité à l'ordre p en x_0. On l'obtient par troncature.
2. Un développement limité, s'il existe est unique. La fonction polynômiale $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ s'appelle la partie régulière à l'ordre n de f en x_0.
3. Si f admet un développement limité en x_0 d'ordre n non nul, et si p est le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$.

Proposition 3.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe C^n sur I.

Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0.

• **Remarque**. Quand f est de classe C^n, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0.
Si $n \geq 2$, la réciproque est fausse (considérer par exemple l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$; f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0).

1.2 Formule de Taylor-Young

• La proposition suivante est admise pour l'instant.

Proposition 4 (Formule de Taylor-Young)**.**

Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur I. Alors pour $x \in I$,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

- **Rappel**. On avait vu la **formule de Taylor pour les polynômes** : soit $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors pour $a \in \mathbb{K}$
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$
Ici, il n'y a pas de reste dans la formule de Taylor. Attention cependant, ceci n'est valable qu'à condition que $n \geq \deg(P)$, ce que l'on a supposé au début.

Méthode.

Avec les même notations que la proposition précédente, voici ce que donne la formule entre 0 et x, en supposant bien sûr que 0 et x appartiennent à I.
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Exemple 2

Soit $P = 2 + 4X - 3X^3 + X^4 + 6X^5 \in \mathbb{R}[X]$. On considère la fonction polynomiale associée
$$P: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 + 4x - 3x^3 + x^4 + 6x^5 \end{array}.$$
Que donne la formule de Taylor-Young pour P au voisinage de 0 à l'ordre 1 ? à l'ordre 2 ? à l'ordre 4 ? à l'ordre 5 ? à l'ordre 6 ? à l'ordre 10 ?

1.3 Développements limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne dans ce paragraphe des développements limités au voisinage de 0. On travaille donc avec une variable $x \in \mathbb{R}$ suffisamment proche de 0 pour que la fonction étudiée soit définie.

- Application $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

En écrivant les premiers termes :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

On en déduit, en remplaçant $x \in]-1,1[$ par $-x$, que

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

En écrivant les premiers termes :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

- La formule de Taylor-Young permet de trouver les développements limités suivants. Les fonctions en question sont de classe C^∞ dans un voisinage de 0, donc admettent une développement limité à tout ordre au voisinage de 0.

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}).}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}).}$$

Remarquer que l'on a effectué ici une développement limité à l'ordre $2n$. On a aussi le développement à l'ordre $2n+1$: $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$.

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1});}$$

Remarquer que l'on a effectué ici un développement limité à l'ordre $2n+1$. On a aussi le développement à l'ordre $2n+2$: $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

Par exemple

$$\boxed{\sqrt{1+x} \;=\; 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \;=\; 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$$

2 Opérations sur les développements limités

On donne ici quelques méthodes de calculs de développements limités.
Soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrira $DL_n(x_0)$ pour « développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 ».

2.1 Développement limité d'une somme

Proposition 5.

Si f et g sont deux applications admettant un $DL_n(x_0)$, alors $f+g$ admet aussi un $DL_n(x_0)$, dont la partie régulière est la somme des parties régulières des $DL_n(x_0)$ de f et g.

Exemple 3

1. $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \cos(x) + \ln(1+x)$. Vérifier que pour $x \in]-1, +\infty[$,
$$\cos(x) + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} = 1 + x - x^2 + o(x^2).$$
2. $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \cos(x + \frac{\pi}{4}) + \ln(2+x)$. Vérifier que pour $x \in]-2, +\infty[$,
$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \ln(2+x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}x - \frac{1+2\sqrt{2}}{8}x^2 + o(x^2).$$
3. $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + x + x^4 + e^x$. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + x + x^4 + e^x \underset{x\to 0}{=} 3 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Méthode.

Pour additionner les développement limités à l'ordre n, il suffit d'additionner les parties régulières.

Exemple 4

Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).}$$

2.2 Développement limité d'un produit

Proposition 6.

Si f et g sont deux applications admettant un $DL_n(x_0)$, alors fg admet aussi un $DL_n(x_0)$, dont la partie régulière est obtenue en faisant le produit des parties régulières de f et g, en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

Exemple 5

1. $DL_3(0)$ de $x \longmapsto e^x(1+\sin(x))$. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$
2. $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{3+x^2+x^3+\ln(1+x)}{1-x}$. Vérifier que pour $x \in]-1,1[$,
$$\frac{3+x^2+x^3+\ln(1+x)}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 3 + 4x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Méthode.

Pour multiplier deux développement limités à l'ordre n, on multiplie les deux parties régulières en ne conservant que les termes de degré plus petits que n.

• **Remarque : un cas particulier important.** Quand on fait le produit fg, on ne gagne pas en précision : le produit d'un $DL_n(x_0)$ par un $DL_n(x_0)$ est un $DL_n(x_0)$, mais si g, par exemple, est de la forme $x \longmapsto (x-x_0)^{n_0}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$, alors on connaît le $DL_{n+n_0}(x_0)$ de fg à partir du $DL_n(x_0)$ de f, comme dans les exemples suivants.

Exemple 6

1. $DL_7(0)$ de $x \longmapsto x^2\cos(x)$. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^7).$$
2. $DL_3(0)$ de $x \longmapsto e^x\sin(x)$. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$
3. $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$. Vérifier que pour $x \in]-1,1[$,
$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

2.3 Développement limité d'un quotient

Proposition 7.

Si f et g sont deux applications admettant un $DL_n(x_0)$ et si g admet une limite non nulle en x_0, alors F/g admet un développement limité à l'ordre n en x_0.

Exemple 7

Déterminons le $DL_5(0)$ de tangente.

$$\tan x = \frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)} = \sin x \times (1-u(x)+u(x)^2-u(x)^3+u(x)^4-u(x)^5+o(x^5)).$$

On a $u(x)^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^5)$, $u(x)^3 = o(x^4)$. D'où en substituant :

$$\begin{aligned}
\tan x &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+\frac{5x^5}{24}+o(x^5)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)
\end{aligned}$$

• **Remarque.** De façon similaire, on perd en précision si l'on divise l'expression à développer par une puissance de $(x-x_0)$ (avec $x \in I\setminus\{x_0\}$).

Exemple 8

1. $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Vérifier que pour $x \neq 0$ dans un voisinage de 0,
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2).$$
2. $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$. Vérifier que pour $x \neq 0$ dans un voisinage de 0,
$$\frac{\sin(x)-x}{x^3} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}+\frac{1}{120}x^2+o(x^2).$$

Proposition 8.

Le développement limité d'une fonction impaire ne contient que des termes de degré impair, et que celui d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

2.4 Composée

On écrit le DL de $\cos(x^2)$ en 0 à l'ordre 8. De $\sin(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 3.

2.5 Lien entre les développements limités d'une fonction et d'une de ses primitives

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, F \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. On suppose que f est de classe C^n sur I, et que F est une primitive de f sur I (F est donc de classe C^{n+1} sur I). On suppose ici que $x = 0$.

On sait que f admet un $DL_n(0)$, notons $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ sa partie régulière. Ainsi, pour $x \in I$,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} A(x) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

On sait que F admet un $DL_{n+1}(0)$, notons $B = \sum_{k=0}^{n+1} b_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sa partie régulière. Ainsi, pour $x \in I$,

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} B(x) + o(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k x^k + o(x^{n+1}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{F^{(k+1)}(0)}{k!} = (k+1)b_{k+1}.$$

Donc

$$B = \sum_{k=0}^{n+1} b_k X^k = b_0 + \sum_{k=1}^{n+1} b_k X^k \underset{\ell=k-1}{=} b_0 + \sum_{\ell=0}^{n} b_{\ell+1} X^{\ell+1} = b_0 + \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_\ell}{\ell+1} X^{\ell+1}.$$

Ainsi B est une primitive de A. Comme $b_0 = F(0)$, B est la primitive de A qui prend la valeur $F(0)$ en 0.

Méthode.

Si f est une application continue sur I admettant le $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f alors F admet un DL à l'ordre n en 0 et :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple 9

1. Trouver le $DL_7(0)$ de arctan.
2. Retrouver le $DL_4(0)$ de cos à partir du $DL_3(0)$ de sin.

3 Exemples d'utilisation des développements limités

3.1 Calculs de limites

• D'après la proposition 11 du chapitre "Comparaisons de suites et de fonctions", trouver la limite d'une fonction en un point fini est équivalent à trouver un développement limité de cette fonction à l'ordre 1 en ce point.

Exemple 10

1. Trouver la limite en 0 de l'expression $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Nous savons, depuis le chapitre précédent que pour calculer une limite il est souvent utile de trouver un équivalent simple de la fonction. Mais un des problèmes majeur est qu'on ne peut pas additionner les équivalents. Par contre nous avons vu dans ce chapitre que les développements limités pouvaient nous permettre de trouver des équivalents simples, or on peut additionner les développements limités.

Exemple 11

1. Calculer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5}$.
2. Trouver la limite en 0 de $\dfrac{e^x-1}{3\sin x-\ln(1+x)}$

3.2 Étude de fonctions

3.2.1 Position relative à une tangente

Méthode.

Pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à sa tangente, on cherche un équivalent de $x \mapsto f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ en a en effectuant un DL de f :

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p \text{ avec } a_p \in \mathbb{R}^* \text{ et } p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$$

Alors $x \mapsto f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a. Ainsi

- si p est pair, $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a et la courbe est, suivant le signe de a_p, soit au-dessus soit en-dessous de sa tangente en a.
- si p est impair, $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ change de signe en a et la courbe traverse sa tangente en a. On parle de **point d'inflexion**.

Exemple 12

Considérons l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que la prolongée par continuité est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0.
3. Étudier la position du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

3.2.2 Recherche d'extrema

• **Rappel**. On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$ une application dérivable sur I. Soit $x_0 \in I$. Si f présente un extremum local en x_0, alors x_0 est un point critique de f (i.e. $f'(x_0)=0$). La réciproque est fausse. Cependant, on dispose de la proposition suivante.

Proposition 9.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur l'intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$.
On suppose que $f'(x_0)=0$, et que $f''(x_0) \neq 0$. Alors :

— si $f''(x_0)>0$, f présente en x_0 un minimum local;

— si $f''(x_0)<0$, f présente en x_0 un maximum local.

Exemple 13

Étudier les extrema (locaux et globaux) de l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$.

3.2.3 Recherche d'asymptote

Définition 10.

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour **asymptote** au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} ax + b + o(1) \qquad (\text{resp. } f(x) \underset{x \to +\infty}{=} ax + b + o(1)).$$

Exemple 14

Montrer, en calculant un développement asymptotique, que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2}$$

admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

3.3 Étude asymptotique de suites

Exemple 15

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$
2. En déduire que $u_n = 1 + o(1)$.
3. Puis que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
4. Et enfin en déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Correction

1. Par récurrence.
2. Notons que $1+\frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi d'après le théorème d'encadrement :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_n = 1 + \underset{n\to\infty}{o}(1)}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la relation de récurrence on a=

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

Ainsi d'après la question 2. on a

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$

D'où

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

On en déduit ainsi :

$$\boxed{u_n = 1 + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On procède de manière identique pour le terme suivant. On obtient ainsi en utilisant la relation de récurrence et de développement asymptotique que l'on vient de trouver :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

D'où

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{0}$ on a donc :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2}\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$

Ainsi

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où :

$$\boxed{u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

4. Comme précédement on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)n^2}\right)$$

D'où comme $\dfrac{1}{n(n-1)^2} \sim \dfrac{1}{n^3}$ on a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)^2 n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, comme ci-dessus :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

Or comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où par produit :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n(n-1)^2} = \frac{1}{n^3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Or comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a

$$\frac{1}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

D'où

$$\frac{1}{n(n-1)^2} = \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On en déduit :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On a donc bien :

$$\boxed{[u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$