Lycée Condorcet Semaine du 03 mars 2025
PCSI

Programme de colles de mathématiques

La colle se déroulera en deux temps.

1. Le cours :
   — Il vous sera demandé d'énoncer une définition ou proposition du cours (pas nécessairement dans la liste des propositions exigibles).
   — Vous devrez ensuite démontrer une des propositions dont la liste figure dans ce programme (avant de la démontrer vous devrez l'énoncer).
2. Exercice(s) :
   Le ou la colleuse vous donnera un ou plusieurs exercices à faire portant sur le programme de colles.

Une note supérieure ou égale à 10 ne saurait être attribuée à un élève ne connaissant pas son cours. Connaître son cours implique bien évidemment de réussir les questions de cours mais pas seulement. Le colleur est à même de juger que le cours n'est pas suffisamment connu pendant le ou les exercices.

La colle portera sur les chapitres **Dérivation** deuxième partie de chapitre, **Calcul matriciel (2)** et **Calcul asymptotique** (1) **et** (2)
Après la question de cours il sera demandé à l'élève d'inverser une matrice de taille 3.

Dérivation

1. **Dérivée en un point, fonction dérivée.**
   (a) Dérivée en un point.
   (b) Interprétation géométrique
   (c) Opérations sur la dérivée en un point (opérations algébriques, composition).
   (d) Fonction dérivables sur un intervalle
   (e) Dérivées usuelles.
2. **Propriétés globales des fonctions dérivables.**
   (a) Points critiques et théorème de Rolle.
   (b) Théorèmes des accroissements finis et applications (lien monotonie et dérivée et théorème de la limite de la fonction dérivée).
3. **Dérrivées successives**
   Définition de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$, opérations algébriques de ces fonctions, formule de Leibniz.
4. **Fonctions convexes**
   Défintion, inégalité de Jensen, caractérisation des fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables. Position d'une fonction convexe par rapport à ces tangentes.
5. **Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.**

Démonstrations-exercices exigibles

— Proposition 37 seulement l'implication f convexe implique la dérivée est croissante.
— Proposition 39 (lien entre convexité est position par rapport aux tangentes.

Savoir-faire de base

— Utiliser les théorèmes globaux (opérations algébriques et composition) pour montrer qu'une fonction est dérivable et calculer sa dérivée.
— Faire une étude locale (soit en revenant à la définition soit en utilsant le théorème de la limite de la dérivée)

pour montrer si une fonction est dérivable en un point.
- Savoir appliquer les théorèmes de Rolle et d'égalité des accroissements finis dans des cadres relativement théoriques.
- Utiliser l'inégalité des accroissement finis pour obtenir des inégalités.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis dans le cadre de l'étude d'une suite récurrente.
- Montrer qu'une fonction est convexe ou concave en utilisant la dérivée de seconde.
- Utiliser la convexité ou la concavité d'une fonction pour obtenir des inégalités.

Analyse asymptotique (1)

1. **Relations de comparaison : cas des fonctions**
   Relations de dominatio et de négligeabilité.
   Fonctions équivalentes au voisinage d'un point.

Démonstrations-exercices exigibles

- Exemple 8.

Analyse asymptotique (2)

1. **Développements limités.**
   Définition. Formule de Tayor-Young. Développements limités usuels.
2. **Opérations sur les développements limités.**
   Développement limité d'une somme, d'un quotient, composée. Primitive et DL.
3. **Exemple d'utilisation des développements limités.**
   Calculs de limites. Étude de fonctions. Étude asymptotique de suites.

Démonstrations-exercices exigibles

- Calculs du DL à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, et arctan.
- Chapitre (2) Calculs du DL à l'ordre 5 en 0 de tan.
- Exemple 12 (Etude de la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{x}$