Lycée Condorcet Mars 2025
PCSI

Comparaison des suites. Comparaison des fonctions

Exercice 1. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage du point considéré.

a) $x \longmapsto \dfrac{x^7+123x^6+\cos(x)+\frac{1}{x}}{2x^{13/2}+e^{-x}}$ en $+\infty$ b) $x \longmapsto \dfrac{\lfloor x^4\rfloor+2x^2+3}{4x^3+\lfloor x^2\rfloor+5}$ en $+\infty$

c) $x \longmapsto \sin(3x)$ en 0 d) $x \longmapsto \sin(3x)$ en $\dfrac{\pi}{3}$ e) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(x)}$ en 0

f) $x \longmapsto \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ en $+\infty$ g) $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ en 0 h) $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ en π

i) $x \longmapsto \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)}$ en 0 j) $x \longmapsto (x+1)^x - x^x$ en 0.

Exercice 2. Montrer que pour $x>0$, $(x+1)^x - x^{x+1} = 1-x+\underset{x\to 0}{o}(x)$.

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Justifier que quand $x \to +\infty$, $a^{\frac{1}{x}} = 1+\dfrac{\ln(a)}{x}+o(\dfrac{1}{x})$. On a un résultat similaire pour $b^{\frac{1}{x}}$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$.

Exercice 4. Étudier l'existence et la valeur d'une limite pour chacune des fonctions suivantes, en le point considéré.

a) $x \longmapsto \dfrac{1-\cos(\ln(1+x^3))}{x^6+\mathrm{Arctan}(x)}$ en 0 b) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}-\sqrt{2}}{x}$ en 0

Développements limités

Exercice 5. Écrire le développement limité à l'ordre n indiqué, au voisinage de 0, pour les fonctions suivantes.

a) $x \mapsto (3x^8-14x^6+13x^5+5x^3-x^2+1)(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $n=2$

b) $x \mapsto (\sin x)^2\cos(x)$, $n=4$ c) $x \mapsto e^{2x+1}+\sin(x)$, $n=3$ d) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $n=4$

e) $x \mapsto \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$ f) $x \mapsto \exp(\cos x)$, $n=3$ g) $x \mapsto \ln\big(\ln(e+x)\big)$, $n=3$.

Exercice 6. Trouver, tout en montrant qu'elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\cos x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{(a^x)}$ $(a>0)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi x+1}{2x+1}\right)$ **(on commencera par montrer que :** $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{x})=\dfrac{\pi}{2}$)

Corrigé :

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a l'égalité :

$$x^x-(\sin x)^x = x^x\left(1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right)$$

Or

$$x^x = e^{x\ln x}$$

et par croissance comparée $x \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc par composition :

$$x^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Cette limite étant non nulle on a

$$x^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

D'où par produit :

$$x^x - (\sin x)^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$$

Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

Et comme $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ par composée et produit de limites on a :

$$x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

On obtient ainsi en utilisant le DL de exp en 0 :

$$e^{x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = 1 + x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$$

Ainsi

$$1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = -x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$$

D'où

$$1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x \underset{x\to 0}{\sim} -x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

et donc

$$x^x - (\sin x)^x \underset{x\to 0}{\sim} -x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

On va maintenant calculer le Dl en 0 du second membre pour trouver un quivalent.
Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u(x) = \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

On a alors :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\big(1 + u(x)\big)$$

avec $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où en utilisant le DL de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = u(x) + \underset{x\to 0}{o}(u(x))$$

Mais on a le DL en 0 :

$$u(x) = \frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

On otbtient ainsi le DL en 0

$$x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

D'où

$$x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

et donc

$$x^x - (\sin x)^x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$$

D'où

$$\frac{x^x - (\sin x)^x}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}$$

Finalement on a la limite :

$$\boxed{\frac{x^x - (\sin x)^x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}}$$

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash 1$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Déterminer la tangente en 0 de la courbe de f. Étudier la position de la courbe par rapport à la tangente.
2. Étudier la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos x - x\sin x}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. On note enore f ce prolongement. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n \ln(1+x)}{x(2+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f_0.
2. Montrer que f_0 est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser alors la position de la courbe de f_0 par rapport à sa tangente en 0 ?
4. *Bonus* Refaire les mêmes questions avec f_n, pour $n \geq 1$.

Exercice 10.
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2, et soit $a \in]0,1[$. On définit une application $g : [0,a[\cup]a,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,a[\cup]a,1],\ g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

1. Prolonger g par continuité au point a. On désigne encore par g l'application obtenue.
2. Montrer que g est de classe C^1 sur $[0,1]$.

Exercice 11.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n e^x = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution, que l'on note x_n.
Trouver $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n \underset{n\to\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + o(\frac{1}{n^3}).$$

(On dit qu'on effectue un **développement asymptotique** à quatre termes de x_n quand $n \to \infty$).

Exercice 12.
Trouver un équivalent simple en 0 de l'application $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{\pi \ln(\sin x)}{2\ln x}\right)$.

Exercice 13.
Chercher d'éventuelles asymptotes aux graphes des fonctions suivantes (on commencera par préciser l'ensemble de définition).

a) $f_1 : x \longmapsto (x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$ b) $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x+1}{1+e^{1/x}}$.

Exercice 14.
Notons f l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$$
2. En déduire un développement limité de f en 0 à tout ordre.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que sa prolongée est dérivable en 0.
4. L'application f est elle deux fois dérivable ?