

Comparaison des suites. Comparaison des fonctions

Exercice 1. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage du point considéré.

- a) $x \mapsto \frac{x^7 + 123x^6 + \cos(x) + \frac{1}{x}}{2x^{13/2} + e^{-x}}$ en $+\infty$ b) $x \mapsto \frac{\lfloor x^4 \rfloor + 2x^2 + 3}{4x^3 + \lfloor x^2 \rfloor + 5}$ en $+\infty$
- c) $x \mapsto \sin(3x)$ en 0 d) $x \mapsto \sin(3x)$ en $\frac{\pi}{3}$ e) $x \mapsto \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\ln(x)}$ en 0
- f) $x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$ g) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ en 0 h) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ en π
- i) $x \mapsto \frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)}$ en 0 j) $x \mapsto (x+1)^x - x^x$ en 0.

Exercice 2. Montrer que pour $x > 0$, $(x+1)^x - x^{x+1} = 1 - x + o(x)$.

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Justifier que quand $x \rightarrow +\infty$, $a^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{\ln(a)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. On a un résultat similaire pour $b^{\frac{1}{x}}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x$.

Exercice 4. Étudier l'existence et la valeur d'une limite pour chacune des fonctions suivantes, en le point considéré.

- a) $x \mapsto \frac{1 - \cos(\ln(1 + x^3))}{x^6 + \text{Arctan}(x)}$ en 0 b) $x \mapsto \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1-x}} - \sqrt{2}}{x}$ en 0

Développements limités

Exercice 5. Écrire le développement limité à l'ordre n indiqué, au voisinage de 0, pour les fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto (3x^8 - 14x^6 + 13x^5 + 5x^3 - x^2 + 1)(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $n = 2$
- b) $x \mapsto (\sin x)^2 \cos(x)$, $n = 4$ c) $x \mapsto e^{2x+1} + \sin(x)$, $n = 3$ d) $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $n = 4$
- e) $x \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ f) $x \mapsto \exp(\cos x)$, $n = 3$ g) $x \mapsto \ln(\ln(e+x))$, $n = 3$.

Exercice 6. Trouver, tout en montrant qu'elles existent, les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{1 - \cos x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^3}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{(a^x)}$ ($a > 0$)
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi x + 1}{2x + 1} \right)$ (on commencera par montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$)

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Déterminer la tangente en 0 de la courbe de f . Étudier la position de la courbe par rapport à la tangente.
2. Étudier la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x - x \sin x}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. On note encore f ce prolongement. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{(1+x)^n \ln(1+x)}{x(2+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f_0 .
2. Montrer que f_0 est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser alors la position de la courbe de f_0 par rapport à sa tangente en 0 ?
4. *Bonus* Refaire les mêmes questions avec f_n , pour $n \geq 1$.

Exercice 10.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 , et soit $a \in]0, 1[$. On définit une application $g : [0, a[\cup]a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, a[\cup]a, 1], \quad g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

1. Prolonger g par continuité au point a . On désigne encore par g l'application obtenue.
2. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

Exercice 11.

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n e^x = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution, que l'on note x_n .

Trouver $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(On dit qu'on effectue un **développement asymptotique** à quatre termes de x_n quand $n \rightarrow \infty$).

Exercice 12.

Trouver un équivalent simple en 0 de l'application $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi \ln(\sin x)}{2 \ln x}\right)$.

Exercice 13.

Chercher d'éventuelles asymptotes aux graphes des fonctions suivantes (on commencera par préciser l'ensemble de définition).

a) $f_1 : x \mapsto (x-1) \exp\left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$ b) $f_2 : x \mapsto \frac{x+1}{1 + e^{1/x}}$.

Exercice 14.

Notons f l'application définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$$
2. En déduire un développement limité de f en 0 à tout ordre.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que sa prolongée est dérivable en 0.
4. L'application f est-elle deux fois dérivable ?