Lycée Condorcet
PCSI

Mars 2025

Polynômes

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Intoduction

- Si a désigne un nombre entier, on peut calculer a^2, a^3, a^4, ...On peut par exemple écrire $a^4 + 2a^3 + a + 4$ (dans $\mathbb{Z}$), et remarquer que $4 = 4 \times 1 = 4 \times a^0$.

- Si a désigne un nombre réel, on peut calculer $a^4 + 2a^3 + a + 4$ (dans $\mathbb{R}$), avec $4 = 4 \times a^0$.

- Si a est un nombre complexe, on peut calculer $a^4 + 2a^3 + a + 4$ (dans $\mathbb{C}$).

- Si a désigne une matrice carrée de taille n, on peut calculer $a^4 + 2a^3 + a + 4Id$, où Id est la matrice identité de taille n. On remarquera qu'ici, en accord avec les conventions, $a^0 = Id$.

- Si a désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut considérer les applications composées $a \circ a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \circ a \circ a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ... et en décidant de noter, pour $k \in \mathbb{N}$, $a^k = \underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{k \text{ fois}}$, avec $a^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on peut considérer l'application $a^4 + 2a^3 + a + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ici, on aura

$$a^4 + 2a^3 + a + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a \circ a \circ a \circ a(x) + 2a \circ a \circ a(x) + a(x) + 4x \end{array}.$$

• De manière générale, quand on écrit "$a^4 + 2a^3 + a + 4$", il est crucial de préciser qui est a, dans quel ensemble il varie. Il existe néanmoins des manipulations algébriques qui ne dépendent que des coefficients devant les "puissances" de a. Dans l'exemple, les coefficients sont $1, 2, 0, 1, 4$, et il faut préciser : 1 devant la puissance 4, 2 devant la puissance 3, 0 devant la puissance 2, etc...
C'est ce que l'on étudie ici. Nous ne présenterons pas la construction formelle de ces objets (ce n'est pas au programme). L'idée est de remplacer la variable a par une indéterminée X, il s'agit juste d'un objet formel. Un polynôme est alors une combinaison linéaire de puissances de l'indéterminée X. Autrement dit un polynôme est une expression de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

où $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ appartient à $\mathbb{K}^{n+1}$. Pour être complet il faut aussi noter que l'on identifie les combinaisons linéaires qui ne se distinguent que par l'ordre de ces termes et on identifie les deux combinaisons linéaires suivantes :

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n, \qquad a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + 0X^{n+1}$$

La combinaison linéaire dont les coefficients sont tous nuls est appelée le polynôme nul.

2 Opérations. Degré

Comme d'habitude, une fois défini de nouveaux objets, il faut définir les opérations entre eux.

2.1 Somme, produit et composition

Soient P_1 et P_2 deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.
Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $(b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tels que

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{et} \quad P_2 = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k.$$

Définition 1.

La somme de P_1 et P_2 est le polynôme

$$P_1 + P_2 = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad \text{où l'on a posé : } (*) \begin{cases} \text{pour } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k > n, \ a_k = 0 \\ \text{pour } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k > m, \ b_k = 0 \end{cases}.$$

Définition 2.

Le produit de P_1 et P_2 est le polynôme

$$\begin{aligned} P_1 P_2 &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} a_k b_\ell X^{k+\ell} \\ &= \sum_{r=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} \right) X^r \quad \big(\text{à nouveau avec } (*)\big). \\ &= \sum_{r=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j \right) X^r \end{aligned}$$

Définition 3.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit de P_1 par le scalaire λ est le polynôme

$$\lambda P_1 = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k.$$

Exemple 1

Soit $P_1 = X^3 + 2X + 1$, $P_2 = -X^3 + 1$, $P_3 = X^2 + 4X$.
Calculer $P_1 + P_2$, $P_1 + P_3$, $P_1 \times P_1$, $P_1 \times P_3$, $7P_2$.

Proposition 4.

On dispose des propriétés suivantes.

1. $\forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ P_1 + P_2 = P_2 + P_1$.
2. Le polynôme nul, 0, est l'élément neutre pour l'addition.
3. Le polynôme 1 (c'est un polynôme « constant ») est l'élément neutre pour la multiplication.
4. $\forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ P_1P_2 = P_2P_1$.
5. $\forall (P_1, P_2, P_3) \in (\mathbb{K}[X])^3,\ (P_1P_2)P_3 = P_1(P_2P_3)$.
6. $\forall (P_1, P_2, P_3) \in (\mathbb{K}[X])^3,\ P_1(P_2 + P_3) = P_1P_2 + P_1P_3$.
7. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall (P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2,\ \ \lambda(P_1 \times P_2) = (\lambda P_1) \times P_2 = P_1 \times (\lambda P_2)$.

Définition 5 (Composition)**.**

Le polynôme $P_1 \circ P_2$ est défini par :

$$P_1 \circ P_2 = \sum_{k=0}^{n} a_k (P_2)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i \right)^k$$

Proposition 6 (Formule du binnôme de Newton et factorisation)**.**

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

- Formule du Binôme
$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$
- Formule de factorisation
$$P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

2.2 Degré

Définition 7.

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On peut poser, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$, $a_k = 0$.
La suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des coefficients de P. Comme P est non nul, cette suite n'est pas la suite nulle.
Il existe un unique $d \in \mathbb{N}$ vérifiant : $a_d \neq 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > d$, $a_k = 0$ (autrement dit, d est l'indice du dernier coefficient non nul).
Cet entier d s'appelle le **degré** de P. On le note $\deg(P)$.

Autrement dit si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors d est le degré de P.

Par convention, on pose $\deg(0) = -\infty$.

• **Remarque**

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\deg(P) \leq n$.
Pour que $\deg(P) = n$ il faut en plus que $a_n \neq 0$.

Exemple 2

Donner le degré des polynômes suivants :

$$P_1 = X^2 + 1, \quad P_2 = X^2 + \pi X + \sqrt{2} X^3 + 1, \quad P_3 = 3 + X^2 - \sqrt{3} X^7 + 0 X^8 - X^4$$

Proposition 8.

Soient $P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $P_2 = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes. Ils sont égaux si et seulement si :

— ils ont même degré d,

— pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k = b_k$.

Proposition 9.

Soit $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Deux polynômes non nuls.Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\deg(P_1 + P_2) \leq \max\big(\deg(P_1), \deg(P_2)\big)$.
   De plus, si $\deg(P_1) \neq \deg(P_2)$, alors $\deg(P_1 + P_2) = \max\big(\deg(P_1), \deg(P_2)\big)$.
2. $\deg(P_1 P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_2)$.
3. Si $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda P_1) = \deg(P_1)$.
4. Si $\deg(P_2) \geq 1$ alors $\deg(P_1 \circ P_2) = \deg(P_1) \times \deg(P_2)$.

• **Remarque**. On peut généraliser ces propriétés à plus de deux polynômes.

Proposition 10.

Les formules de la proposition 9 se généralisent aux polynômes éventuellement nuls en prenant la convention, si d est un entier naturel :

$$-\infty + d = -\infty, \quad -\infty \times d = -\infty,$$

Exemple 3

En reprenant les notations de l'exemple précédent, quel est le degré des polynômes $P_1 + P_2$, $P_1 + P_3$, $P_1 \times P_1$, $P_1 \times P_2$?

Exemple 4

1. Montrer que la seule solution à l'équation d'inconnues P et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
   $$Q^2 = X P^2$$
   est le couple $(0_{\mathbb{K}[X]}, 0_{\mathbb{K}[X]})$.
2. Déterminer tous les polynômes P satisfaisant $P(X^2) = (X^2 + 1) P(X)$.

Proposition 11 (Intégrité)**.**

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]$,

$$PQ = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

Proposition 12.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on a
$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P \times Q = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad P \in \mathbb{K}^*$$

Définition 13.

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Soit $d = \deg(P)$. Soit $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ (on a $a_d \neq 0$).

- Le scalaire a_d s'appelle le **coefficient dominant** de P.
  Si $a_d = 1$, on dit que P est un polynôme **unitaire**.
- Le coefficient a_0 s'appelle le **coefficient constant** de P.

Exemple 5

Déterminer le degré et les coefficients dominants des polynômes suivants :
$$P_1 = (X+1)^{2n} - X^{2n-1}(X+2n) \text{ pour } n \geq 2, \qquad P_2 = (X+3)^n - (X+2)^n$$

Définition 14.

Un **monôme** est un polynôme dont un et un seul coefficient est non nul.

Définition 15.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.
$$\mathbb{K}_n[X] = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\big\}.$$

Proposition 16.

L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison lin"éaire :
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2, \qquad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

Définition 17.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On définit l'application
$$\begin{array}{rccl} \tilde{P} : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}.$$

On dit que $\tilde{P}$ est la **fonction polynomiale** associée au polynôme P.

Notation

Soit P un polynôme, et a un scalaire (un élément de $\mathbb{K}$). L'évaluation de P en a noté $P(a)$ est le scalaire :

$$P(a) = \tilde{P}(a)$$

Méthode (Méthode de Hörner).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
Pour évaluer en x ce polynôme, il suffit de faire n additions et n multiplications en suivant le parenthèsage ci-dessous (en commençant pas la parenthèse intérieure) :

$$P(x) = ((\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots)x + a_1)x + a_0$$

C'est la méthode la plus efficace pour évaluer une fonction polynomiale en un point x.

Exemple 6

Évaluer $P = 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 1$ en -2.

3 Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

3.1 Divisibilité

Définition 18.

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
On dit que A **divise** B (et on note $A|B$) s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AC$.
Dans ce cas, on dit aussi que A est un **diviseur** de B, et que B est un **multiple** de A.

Proposition 19.

Soit $(A, B, C) \in (\mathbb{K}[X])^3$.

1. On a $A|A$.
2. Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.
3. Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda A$ (on dit alors que A et B sont **associés**).

Exemple 7

— Le polynôme $X - 1$ divise $X^3 - 1$ car $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.
— Le polynôme $X^2 + 1$ divise $X^4 - 1$ car $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$.

Proposition 20.

Soit $(A, B, C, D) \in (\mathbb{K}[X])^4$.

1. Si $A|B$ et $C|D$ alors $AC|BD$.
2. Si $A|B$ alors $AC|BC$.
3. Si $C \neq 0$ et $AC|BC$, alors $A|B$.
4. Si $D|A$ et $D|B$, alors pour tout $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $D|AU + BV$.

- **Remarque**. Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Si A divise B et si $B \neq 0$, alors $\deg(A) \leq \deg(B)$.

3.2 Division euclidienne

Théorème 21.

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $B \neq 0$. Il existe un unique $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

(on peut avoir $R = 0$, c'est à dire $\deg(R) = -\infty$).
On dit qu'on a effectué la **division euclidienne** de A par B.
Le polynôme Q est appelé le **quotient**, et R est appelé le **reste** de cette division euclidienne.

- **Exemples, algorithme.**

Méthode.

Pour trouver le reste de la division euclidienne d'un polynôme A par un autre polynôme non nul B on peut utiliser deux types de méthodes.

- La première consiste, tout simplement, à mettre en place l'agorithme d'Euclide. Mais dans certaine situation (polynôme de degré trop grand ou indéterminé) le calcul est malaisé.
- Parfois il est plus aisé d'utiliser la définition de ce polynôme. Ainsi d'après le théorème de division euclidienne il existe deux polynômes Q et R tels que :

$$A = BQ + R$$

avec $\deg(R) < \deg(B)$. Cette inégalité nous permet de trouver le degré maximal de R. Pour trouver ses coefficients, en général, on évalue l'égalité en certains nombres bien choisis.

Exemple 8

Trouver le reste de la division euclidienne de $4X^4 + X^3 - X^2 - 5$ par $2X^2 + X + 1$.

Exemple 9

Soient $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Trouver le reste de la division euclidienne de $A = (\cos\alpha + X\sin\alpha)^n$ par $B = X^2 + 1$.

Méthode.

Notons qu'un polynôme P_1 divise un polynôme P_2 si et seulement si le reste de la division euclidienne de P_2 par P_1 est nul. Ainsi pour montrer qu'un polynôme P_1 divise un polynôme P_2, on pourra calculer la division euclidienne de P_2 par P_1.

Exemple 10

Montrer que $X^2 + 2X + 1$ divise $X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.

4 Dérivée et dérivées successives d'un polynôme

- On définit la dérivée d'un polynôme en s'inspirant directement de ce qu'est la dérivée d'une fonction polynomiale.

Définition 22.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

La **dérivée** du polynôme P est le polynôme noté P', défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i.$$

Proposition 23.

Quelque soit les polynômes P et Q à coefficients dans $\mathbb{K}$, et le scalaire α a les propriétés suivantes :

1. On a $P' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P$ est constant.
2. Si $\deg(P) \geq 1$, on a$\deg(P') = \deg(P) - 1$.
3. $(P+Q)' = P' + Q'$.
4. $(\alpha P)' = \alpha P'$.
5. $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
6. $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Démonstration : Soient $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ deux polynômes.

5. Par définition les polynômes dérivés de P et Q s'écrivent :

$$P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} \quad \text{et} \quad Q' = \sum_{j=1}^{m} j b_j X^{j-1}$$

On a, par définition du produit

$$PQ = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j X^{i+j}$$

Ainsi par définition de la dérivée formelle :

$$\begin{aligned}
(PQ)' &= \sum_{\substack{i \in [\![0,n]\!] \\ j \in [\![0,m]\!] \\ (i,j) \neq (0,0)}} (i+j) a_i b_j X^{i+j-1} \\
&= \sum_{\substack{i \in [\![0,n]\!] \\ j \in [\![0,m]\!] \\ (i,j) \neq (0,0)}} i a_i b_j X^{i+j-1} + \sum_{\substack{i \in [\![0,n]\!] \\ j \in [\![0,m]\!] \\ (i,j) \neq (0,0)}} a_i j b_j X^{i+j-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} i a_i b_j X^{i-1+j} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i j b_j X^{i+j-1}
\end{aligned}$$

Dans la première double somme, on reconnait le produit de P' avec Q et dans la deuxième le produit de P avec Q'. On a donc bien :

$$\boxed{(PQ)' = P'Q + PQ'}$$

6. On a tout d'abord besoin d'un résultat, que l'on va démontrer par récurrence, sur la dérivée des puissances d'un polynôme. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $A(k)$ l'assertion :

$$A(k) : (P^k)' = kP'(P)^{k-1}$$

Attention ! P^k signifie la k-ième puissance de P pas sa dérivée k-ième ! On a bien :

$$P' = 1P'P^0$$

L'assertion $A(0)$ est donc vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $A(k)$ vraie.
On a, par définition de la puissance d'un polynôme :

$$(P^{k+1})' = (P^k \times P)'$$

Ainsi d'après ce qu'on a démontré au point précédent :

$$(P^{k+1})' = (P^k)' \times P + P^k \times P'$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$(P^{k+1})' = kP'P^{k-1}P + P'P^k$$

On a donc bien

$$(P^{k+1})' = (k+1)P'P^k$$

Ainsi si $A(k)$ est vraie alors $A(k+1)$ l'est aussi.
Le principe de récurrence permet de conclure que $A(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrons maintenant la formule sur la dérivation de la composée de polynômes.
On a, d'après le 1. de la proposition :

$$(P \circ Q)' = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(Q^k\right)'$$

Ainsi d'après le résultat que nous venons de montrer :

$$\begin{aligned}(P \circ Q)' &= \sum_{k=1}^{n} k a_k Q' Q^{k-1} \\ &= Q' \sum_{k=1}^{n} k a_k Q^{k-1}\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)}$$

■

Définition 24.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- On pose $P^{(1)} = P'$. Le polynôme $P^{(1)}$ est appelé la **dérivée première** de P.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir défini le polynôme $P^{(k)}$, appelé dérivée k-ème de P. On pose alors $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$, et on dit que $P^{(k+1)}$ est la dérivée $(k+1)$-ème de P.

On définit ainsi par récurrence les dérivées successives du polynôme P.

Exemple 11

Calculer les dérivées successives de $P(X) = X^4 + 2X^2 - 1$.

- **Remarque**

Lorsque $\deg P = n$, alors pour tout $k > n$, $P^{(k)} = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Exemple 12

Calculer les dérivées successives du polynôme X^n.

Vous pourrez montrer, par récurrence, que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(X^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$.

Proposition 25 (Formule de Leibniz).

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Proposition 26 (Formule de Taylor pour les polynômes).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré d et a un scalaire.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

5 Racines d'un polynôme

5.1 Racines et fonctions polynomiales

Définition 27.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une **racine** de P (ou : un **zéro** de P) si $P(a) = 0$.

- **Exemple** d'un polynôme à coefficients réels admettant des racines sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition 28.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$.

1. Le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $\tilde{P}(a)$.
2. On a l'équivalence : a est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P.

Exemple 13

Montrer que $X^2 - 3X + 2$ divise $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

Proposition 29.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts.

$$a_1, \cdots, a_n \text{ sont racines de } P \iff (X-a_1)\cdots(X-a_n)|P.$$

Théorème 30.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si P est de degré n, alors P admet au plus n racines.
2. Si $\deg(P) \leq n$ et si P admet $n+1$ racines, alors $P = 0$.
3. Si P admet une infinité de racines, alors $P = 0$.

Exemple 14

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$.
Montrer que $P = Q = 0$.

Corollaire 31.

Soit $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
Si $\tilde{P_1} = \tilde{P_2}$ alors $P_1 = P_2$.
On peut ainsi identifier polynômes et fonctions polynomiales.
En pratique, on gardera la notation P pour désigner la fonction polynomiale associée à P.

5.2 Multiplicité d'une racine

Définition 32.

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Soit $a \in \mathbb{K}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \deg(P)$, le polynôme $(X-a)^n$ ne divise pas P.
Ainsi l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; (X-a)^k \text{ divise } P\right\}$ admet un plus grand élément. Notons $m \in \mathbb{N}$ ce plus grand élément. Il est caractérisé par :

$$\Big((X-a)^m \text{ divise } P\Big) \text{ et } \Big((X-a)^{m+1} \text{ ne divise pas } P\Big).$$

L'entier m s'appelle **l'ordre de multiplicité** de la racine a dans le polynôme P.

- **Vocabulaire**. Avec les notations de la définition,
  - si $m = 1$, on dit que a est une racine simple de P,
  - si $m = 2$, on dit que a est une racine double de P,
  - si $m \geq 2$, on dit que a est une racine multiple de P.

Proposition 33.

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Les assertions 1. et 2. sont équivalentes.

1. Le scalaire a est racine de P d'ordre m.
2. Pour $k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$, et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Exemple 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a et b pour que

$$P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$$

admette une racine double $x = 1$.

6 Factorisation

6.1 Polynômes scindés, polynômes irréductibles.

Définition 34.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur à 1 est **scindé** s'il peut être factorisé en n polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$. C'est à dire, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a_1, \cdots, a_n$ n scalaires distincts ou non tels que :

$$P = \lambda(X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

C'est à dire aussi, en regroupant les racines distinctes avec leur ordres de multiplicité :

$$P = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_k)^{\alpha_k}$$

Remarque. Ainsi un polynôme est scindé si et seulement si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égale à son degré.

Remarque. La notion de polynôme scindé dépend du corps considéré.

Exemple 16

Le polynôme $X^n - 1$ est scindé dans $\mathbb{C}$.

Définition 35.

Un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible sur** $\mathbb{K}$ s'il satisfait :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad P = AB \quad \Rightarrow \quad \deg(A) = 0 \text{ ou } \deg(B) = 0$$

Remarques.

- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ jouent le rôle des nombres premiers dans $\mathbb{N}$.
- Les polynômes de degré un sont irréductibles.

— Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé et irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\deg(P) = 1$

— Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

Exemple 17

Montrer qu'un polynôme réel de degré 3 n'est jamais irréductible.

6.2 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 36 (Théorème de d'Alembert-Gauss).

Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine complexe.
On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Proposition 37.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Proposition 38.

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2. Tout polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ se factorise de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sous la forme :

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{\alpha_i}$$

6.3 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$.

Lemme 39.

Soit P un polynôme réel et $\alpha \in \mathbb{C}$
Si α est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

Proposition 40.

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont
   — les polynômes de degré 1 ;
   — les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.
2. Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ se factorise de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$P = \lambda \left(\prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\alpha_i} \right) \left(\prod_{j=1}^{q} (X^2 - (z_j + \overline{z_j})X + z_j\overline{z_j})^{\beta_i} \right)$$

Méthode.

Pour factoriser un polynôme réel dans $\mathbb{R}$ il n'y a pas de méthodes systématiques mais on peut penser à ces deux méthodes :

- Comme dans la démonstration du théorème ci-dessus, on factorise le polynôme dans $\mathbb{C}$ puis on regroupe les termes complexes conjugués.
- On utilise habilement les identités remarquables et autres formules de factorisation dans $\mathbb{R}$.

Exemple 18

Factoriser dans $\mathbb{R}$, par deux méthodes différentes, le polynôme $X^4 + 1$.