Lycée Condorcet
PCSI

Mars 2025

Arithmétique

1 Divisibilité

Exercice 1.
Montrer que, tout $n \in \mathbb{N}^*$, $609 |\ 5^{4n} - 2^{4n}$.

Exercice 2.
Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$.

Exercice 3.
Soir $n \geq 1$ un entier. Déterminer le reste de la division euclidienne de la somme des n premiers entiers strictement positifs par n.

Exercice 4.
Soient a, b, n trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b, et r le reste. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

2 PGCD, PPCM, nombres premiers entre eux.

Exercice 5.
Calculer le PGCD de 9100 et 1848, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $n^3 + 2n$ et $n^4 + 3n^2 + 1$.

Exercice 6.

1. Quels sont les diviseurs communs à 390 et 525.
2. Calculer le PGCD de $3^{123} - 5$ et 25.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$.

Exercice 7.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers défnie par $u_0 = 14$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$. Démontrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 8. Homogénéité du PGCD

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, PGCD$(\lambda a,\ \lambda b) = \lambda($ PGCD$(a,\ b)$.
2. En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, PPCM$(\lambda a,\ \lambda b) = \lambda($ PPCM$(a,\ b)$.

3 Nombres permiers

Exercice 9.

1. Soit q un entier impair. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x^q + 1 = (x+1)(x^{q-1} - x^{q-2} + \cdots + 1)$$
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier. Montrer que $m = 2^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Nombre de Mersenne Soient a, $n \leq 2$ des entiers.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. On note $M_n = 2^n - 1$ le n-ième nombre de Mersenne. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.