Lycée Condorcet
PCSI

Mars 2025

Introduction aux espaces vectoriels

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels **3**
2.1 Définitions, exemples 3
2.2 Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs 6

3 Familles de vecteurs **8**
3.1 Familles libres, familles liées 8
3.2 Familles génératrices 11
3.3 Bases 12

4 Sommes de sous-espaces vectoriels **13**
4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels 13
4.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels 14
4.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 15

1 Introduction

Dans tout le chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Considérons les ensembles suivants : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, pour un entier n $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, l'ensemble des matrices de taille $n \times p$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des suites réelles.

Tous ces ensembles sont de nature très différente. Une suite n'a, a priori, pas grand chose à voir avec une matrice ou une fonction réelle.

Pourtant tous ces ensembles ont en commun d'avoir des lois de compositions (des opérations) qui ont les mêmes propriétés. Il sagit de la loi "+" et la loi "."

Par exemple, considérons l'ensemble $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On peut définir une première loi, notée $+$, de la façon suivante :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})^2,\ f+g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}.$$

À deux éléments f et g de $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$, on associe un élément $f+g$, qui est encore dans $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$. On dit que $+$ est une loi de composition interne.

Considérons une autre loi, définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{A}([0,1],\mathbb{R}),\ \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

À un scalaire λ, et à un élément f de $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$, on associe λf qui est un élément de $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$. On dit que cette loi, notée $\cdot$, appelée la multiplication par un scalaire, est une loi de composition externe.

Quand on considère l'ensemble $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$, et que l'on veut travailler uniquement avec les deux opérations mentionnées ci-dessus, on dit que l'on considère l'ensemble $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$ **muni** des deux lois $+$ et $\cdot$, et on note $\big(\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R}),+,\cdot\big)$.

On peut faire de même avec tous les ensembles cités et comme ces lois vérifient les mêmes propriétés (associativité de la loi $+$, existence d'un 0, existence d'un opposé, distributivité de la loi . sur la loi $+$, etc) elles munissent ces ensembles d'une même structure, la structure d'espace vectoriel. C'est à dire que tous ces ensembles vont avoir des propriétés communes.

L'objet de ce chapitre est d'étudier ces propriétés communes, cette structure commune.

2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

2.1 Définitions, exemples

Définition 1.

Soit E un ensemble, muni d'une loi de composition interne, notée $+$, et d'une loi de composition externe, notée $\cdot$.
On dit que E est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** si l'on dispose des propriétés suivantes :

1. Propriétés de $+$
   (a) La loi $+$ est associative.
   (b) Il existe un élément neutre pour $+$, noté 0_E. Ainsi : $\forall x \in E,\ 0_E + x = x + 0_E = x$.
   (c) Tout élément de E admet un opposé pour la loi $+$: pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x + y = y + x = 0_E$. On note $y = -x$.
   (d) La loi $+$ est commutative.

2. Propriétés de $\cdot$
   (a) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$.
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
   (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
   (d) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

Proposition 2.

Avec les mêmes notations, si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a les propriétés suivantes.

1. $\forall x \in E,\ 0 \cdot x = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
4. $\forall x \in E,\ -x = (-1) \cdot x$.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$. On a
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \lambda \cdot x = \lambda \cdot y \Longrightarrow x = y.$$
6. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$. On a :
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \cdot x = \mu \cdot x \Longrightarrow \lambda = \mu.$$

• **Remarque**. Un espace vectoriel n'est jamais vide, puisqu'il contient toujours l'élément neutre pour $+$. En pratique, il arrive souvent que l'on note cet élément 0, au lieu de 0_E.

Exemple 1

1. L'ensemble $\{0\}$, muni de l'addition $(0+0=0)$ et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel. On dit que c'est **l'espace vectoriel nul**.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $E = \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$. Pour $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose
$$f+g: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda\cdot f: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$
Alors $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. On considère $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire. Alors $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Si P et Q sont deux polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$, on peut définir le polynôme $P+Q$ (comme dans l'exemple précédent). Mais ici, pour obtenir une loi $+$ sur $\mathbb{K}_n[X]$, il faut s'assurer que le polynôme $P+Q$ est bien dans $\mathbb{K}_n[X]$. C'est le cas, car on sait que $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, donc $\deg(P+Q) \leq n$, i.e. $P+Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
De façon similaire, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $\lambda P \in \mathbb{K}_n[X]$.
On peut donc considérer l'espace $(\mathbb{K}_n[X],+,\cdot)$, et c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
5. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices, et de la multiplication des matrices par des scalaires. Alors $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{K}^n$ des lois $+$ et $\cdot$ suivantes :
   — pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose
   $$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n);$$
   — pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose
   $$\lambda\cdot(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).$$

   Alors $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   Qu'obtient-on si $n=1$?
7. On peut munir l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles de l'addition et de la multiplication par un scalaire, et $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 3.

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie de E.
On suppose que F est **stable** par les lois $+$ et $\cdot$, c'est à dire :
$$\forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F, \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda\cdot x \in F.$$
On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est un espace vectoriel pour les lois de E.
On parlera de lois induites.

Exemple 2

1. Dans l'exemple 4 précédent, on a pris sur $\mathbb{K}_n[X]$ les lois $+$ et $\cdot$ induites par celles définies sur $\mathbb{K}[X]$. On a vérifié que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par ces lois.

• **Remarque**. En pratique, les règles de calcul qui sont valables dans $(E,+,\cdot)$ sont en particulier valables dans toute partie stable F. D'où la proposition suivante.

Proposition 4 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels).

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$.
2. $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda x \in F \end{cases}$.
3. $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda x + y \in F \end{cases}$.

- **Remarques**

1. Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$, alors $0_E \in F$.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{K}^m$, et tout $(x_1,\dots,x_m) \in F^m$, on a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \in F$.

Exemple 3

1. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de $(E,+,\cdot)$.
2. Dans les chapitres sur la continuité et la dérivation nous avons en fait montré que les sous ensembles $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}^1(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ étaient des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.
3. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\mathscr{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n\right\}$$

Nous avons montré au chapitre Suites (1) qu'il s'agissait d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exemple 4

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère trois plans :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}_1 \text{ d'équation} & x+y+z=0 \\ \mathcal{P}_2 \text{ d'équation} & 2x+y-z=0 \\ \mathcal{P}_3 \text{ d'équation} & 3x-y-z=1. \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, mais pas $\mathcal{P}_3$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | AM = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.

3. Montrer que l'ensemble $F = \left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

5. Considérons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit F l'ensemble des suites réelles convergentes. Soit G l'ensemble des suites réelles convergentes de limite nulle.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $(E,+,\cdot)$ (et même, G est un sous-espace vectoriel de $(F,+,\cdot)$).

Exemple 5

1. Soit F le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0 \right\}$. Montrer que F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit G le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \right\}$. Montrer que G n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.
2. Plus généralement, si I est un ensemble et si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

2.2 Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Définition 6.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.
Soit $x \in E$. On dit que x est **combinaison linéaire** de $x_1, \dots, x_n$ s'**il existe** $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Autrement dit, x est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ s'il peut être exprimé par des opérations $+$ et $.$ sur les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Exemple 6

1. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que les coefficients sont uniques ?

Méthode.

Un vecteur x est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Se demander si x est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est donc équivalent à répondre à la question :
Le système $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ admet-il une solution ? La solution, si elle existe n'est pas nécessairement unique.
En pratique l'équation $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ se ramène toujours à un système linéaire.

Exemple 7

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

Exemple 8

1. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Est-ce que les coefficients sont uniques ?
2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que les coefficients sont uniques ?

Exemple 9

À quelle condition sur a b et c le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Définition 7.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$. On note $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$.

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Exemple 10

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{Vect}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Préciser $\mathrm{Vect}(u, v, w)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathbb{K}^n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note
$$e_i = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ place}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$
Alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{K}^n$.

Proposition 8.

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n \in E$.

1. $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$.
2. $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ contenant $x_1,\dots,x_n$: si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ tel que $x_1 \in F$, ..., $x_n \in F$, alors $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n) \subset F$.
3. $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $(E,+,\cdot)$ contenant $x_1,\dots,x_n$.

Définition 9.

Avec les mêmes notations, $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est appelé le **sous-espace vectoriel de** $(E,+,\cdot)$ **engendré par** $x_1,\dots,x_n$.

Méthode.

Pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel il suffit de démontrer qu'il est engendré par une famille de vecteurs.

Exemple 11

Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_1$ défini plus haut est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

• **Convention**. On définit ainsi l'espace engendré par une famille de vecteurs. L'espace engendré par la famille vide (aucun vecteur) est l'espace vectoriel nul.

• **Remarques** Si x_{n+1} est un vecteur de E, on a $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n) \subset \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$. Il peut y avoir égalité entre ces deux sous-espaces vectoriels.

3 Familles de vecteurs

3.1 Familles libres, familles liées

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 10.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$.
On dit que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est **libre** si :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E\right) \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs $x_1,\dots,x_n$ sont **linéairement indépendants**.

- **Convention**. La famille vide est libre.

Proposition 11.

1. Pour $u \in E$, la famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
2. Pour $(u, v) \in E^2$, la famille (u, v) est libre si et seulement si u et v sont non colinéaires.

Méthode.

Pour montrer que la famille $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ est libre, on considère n scallaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = 0$$

De cette égalité dans E on va déduire au moins n égalités dans $\mathbb{K}$ ce qui va nous donner un système linéaire d'inconnues les λ_i. Si on ne trouve qu'une unique solution (la solution $(0, \cdots, 0)$) alors la famille est libre.

Exemple 12

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons
$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est libre.
2. Soit P_1, P_2 et P_3 les polynômes réels :
$$P_1 = X^2 + 1, \quad P_2 = X^2 + X, \quad P_3 = X^2 - 2X + 1.$$
Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.
3. Reprenons l'exemple 2 du paragraphe précédent, où l'on travaillait dans $\mathbb{K}^n$, avec $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.
La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
4. Reprenons l'exemple 3 du paragraphe précédent, où $\mathscr{S}$ était un ensemble de suites
$$\mathscr{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n\right\}$$
L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ d'admet une unique solution réelle $r_0 = -1$ Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n(-1)^n, \qquad v_n = (-1)^n$$
Le chapitre Suite (1) nous indique que ces deux suites appartiennent à $\mathscr{S}$. Montrer que la famille $\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ est libre.
5. Prenons $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons
$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}.$$
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

- **Remarques**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
   — Si l'un des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est nul (i.e. si : $\exists i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0_E$), alors la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas libre. La réciproque est fausse.

   — Si deux vecteurs parmi $x_1, \ldots, x_n$ sont égaux (i.e. si : $\exists (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j$ et $x_i = x_j$), alors la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas libre. La réciproque est fausse.
2. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs de E, alors toute famille composée des mêmes n vecteurs, mais dans un ordre différent, est aussi une famille libre.
3. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs de E, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et tout $(i_1, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$ tel que $i_1 < \cdots < i_k$, la famille $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ est libre. Autrement dit : toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Définition 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas libre, on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est **liée**, ou que $x_1, \ldots, x_n$ sont **linéairement dépendants**. Ainsi, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ et tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

Exemple 13

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est liée.
2. Soient M_1, M_2 et M_3 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$
   Montrer que la famille (M_1, M_2, M_3) est liée.
3. Soit f_1, f_2, f_3 les fonctions continues définies par :
$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^2 x \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos 2x \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}.$$
   Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est liée.

Proposition 13.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que
$$0 \leq \deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_k.$$
Dans ce cas, on dit que les polynômes $P_1, \ldots, P_k$ sont à degrés **échelonnés**.
Alors la famille $(P_1, \ldots, P_k)$ est libre.

Exemple 14

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille
$$(1,\ X^2,\ X^3+3X+2,\ -X^5+X^2,\ X^8-5X^4)$$
est libre.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre.
3. Montre que, dans $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $(1, (X-1), (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ est libre.

Proposition 14.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de E et $x \in E$ tel qu'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :
$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$
Alors le n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est unique.

Ainsi si un éléments x est une combinaison linéaire d'éléments d'une **famille libre** alors, si l'on fixe l'ordre des vecteurs, cette combinaison linéaire est **unique**.

3.2 Familles génératrices

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 15.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $x_1, \dots, x_n \in E$.
On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une **famille génératrice** de E si tout vecteur x de E s'écrit comme combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$.
Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Si $x \in E$ et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une **famille génératrice** de E alors **il existe** une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ égal à x.

Exemple 15

1. Dans $\mathbb{R}^3$, notons $x = (1, 0, 0)$ et $y = (1, 1, -1)$, et $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\}$. Montrer que la famille (x, y) est génératrice de V.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $E = \mathbb{K}^n$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.
3. L'ensemble $\mathscr{S}$ des suites vérifiant une relation linéaire d'ordre 2. Dans le cours Suite (1) nous avons vu que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice.
5. Montrer que la famille X^2+1, $2X$, -3, $-X^2-X$ est une famille génratrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exemple 16

1. Trouver une famille génératrice des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$
2. Trouver une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- **Remarques**
  1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \in E$. Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice de E, alors la famille $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ est aussi génératrice de E. On peut dire que tout « surfamille » d'une famille génératrice est génératrice.
  2. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de E, alors toute famille composée des mêmes vecteurs, mais dans un ordre différent, est aussi génératrice de E.

Proposition 16.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ une famille de E, alors $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si etseulement si

$$E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$

- On n'a considéré dans ce cours que des familles ayant un nombre fini de vecteurs. Ces familles engendrent certains espaces, et il existe des espaces qui ne peuvent pas être engendrés par une famille finie. On pose la définition suivante.

Définition 17.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est **de dimension finie** s'il existe un famille génératrice finie de E.

3.3 Bases

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 18.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une **base** de E si $(x_1, \ldots, x_n)$ est à la fois libre et génératrice de E.

Proposition 19.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille de E, alors $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement s'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

On dit que les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les <u>coordonnées</u> (ou : les <u>composantes</u>) de x <u>dans la base</u> $(x_1, \ldots, x_n)$.

- **Remarque**. Avec les mêmes notations, les assertions suivantes sont équivalentes.
  1. La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.

Supposons que $(x_1, \ldots, x_n)$ soit une base de E, et soit $x \in E$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ l'unique n-uplet tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Exemple 17

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$. Posons $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 0, -2)$. Montrer que (u, v) est une base de F. Soit $w = (2, 1, -1)$. Vérifier que $w \in F$, et trouver les coordonnées de w dans la base (u, v).
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{K}^n$, on pose encore $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.
   Soit $u = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Trouver les coordonnées de u dans la base canonique.
3. On reprend l'exemple 3 des paragraphes précédents, où $\mathscr{S}$ était un ensemble de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux. La famille (A, B) est une base de $\mathscr{S}$.
4. On reprend l'exemple 4 du paragraphe précédent, avec

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}.$$

   On a vu que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Montrer que ce n'est pas une base de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, autrement dit, montrer qu'elle n'est pas génératrice de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour cela, on pourra par exemple poser

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

   et vérifier que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre, ce qui entraîne que $f_4 \notin \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On travaille dans $\mathbb{K}_n[X]$. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
   Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Trouver les composantes de P dans la base canonique.

Exemple 18

1. Trouver une base des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\big\}$ et $G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\big\}$
2. Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $F = \left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

4 Sommes de sous-espaces vectoriels

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition-Définition 20.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On pose

$$E_1 + E_2 = \big\{x_1 + x_2 \;\big|\; x_1 \in E_1,\ x_2 \in \mathrm{E}_2\big\}.$$

$$E_1 + E_2 = \big\{x \in E \;\big|\; \exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2\big\}$$

Alors $E_1 + E_2$ est une partie de E, et $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
Ce sous-espace vectoriel $E_1 + E_2$ est appelé la **somme** de E_1 et E_2.

- **Remarques**

1. Le sous-espace vectoriel $E_1 + E_2$ est l'ensemble des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.
   Autrement dit, pour $x \in E$, on a l'équivalence :

$$\Big(x \in E_1 + E_2\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\underline{\text{il existe}}\ x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2 \text{ tels que } x = x_1 + x_2\Big).$$

2. On a toujours $E_1 \subset E_1 + E_2$ et $E_2 \subset E_1 + E_2$.
3. Si $E_2 \subset E_1$, alors $E_1 + E_2 = E_1$. La réciproque est vraie.
   On a donc l'équivalence : $\big(E_1 + E_2 = E_1\big) \iff \big(E_2 \subset E_1\big)$.

Proposition 21.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Soit $\mathcal{F}_1 = (e_1, \cdots, e_n)$ (respectivement $\mathcal{F}_2 = (f_1, \cdots, f_m)$) une famille génératrice de E_1 (respectivement E_2), alors la famille $(e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m)$ (on l'appelle concaténation de la famille $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$), est une famille génératrice de $E_1 + E_2$.

Exemple 19

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $D_1 = \text{Vect}\big((1,0,0)\big)$ et $D_2 = \text{Vect}\big((0,1,0)\big)$. Dessiner D_1 et D_2, puis déterminer $D_1 + D_2$, et le dessiner.
   Posons $P = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\big\}$. Déterminer $D_1 + P$.
2. Soit $F_1 = \text{Vect}(1, X^2+1)$ et $F_2 = \text{Vect}(X, X^2)$. Montrer que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = X^2$, la décomposition de P est-elle unique ?
3. Dans $\mathbb{R}^4$, posons $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (0,2,2,1)$, et
   $$F = \text{Vect}(u_1, u_2), \quad G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3t = 0 \\ 2x - z + t = 0 \end{array}\right. \right\}.$$
   Déterminer une base de F, une base de G, et en déduire une famille génératrice de $F + G$. Extraire de cette famille génératrice une base $\mathcal{B}_1$ de $F + G$.
   Déterminer également $F \cap G$, en donnant une base de $F \cap G$. Compléter cette famille libre de $F + G$ en une base de $F + G$, en utilisant des vecteurs de $\mathcal{B}_1$.

4.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 22.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que E_1 et E_2 sont **en somme directe** si tout vecteur de $E_1 + E_2$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.
En termes de quantificateurs, cette condition s'écrit :
$$\forall x \in E_1 + E_2,\ \exists! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ x = x_1 + x_2.$$
Dans ce cas, on note $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$.

• **Remarque**. Par définition tout vecteur de $E_1 + E_2$ s'écrit comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2. Dire que la somme $E_1 + E_2$ est directe, c'est dire que pour tout vecteur x de $E_1 + E_2$, il n'y a qu'une seule façon d'écrire x comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.

Exemple 20

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Que vaut la somme $F + \{0_E\}$? Vérifier que cette somme est directe.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, posons $D_1 = \text{Vect}\big((1,1)\big)$ et $D_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\big\}$.
   (a) Déterminer la somme $D_1 + D_1$. Montrer que cette somme n'est pas directe.
   (b) Déterminer $D_1 + D_2$. Montrer que cette somme est directe.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $D = \text{Vect}\big((2,1,0)\big)$, et
   $$P_1 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\big\}, \quad P_2 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\big\}.$$
   Montrer que la somme $P_1 + P_2$ n'est pas directe, et que la somme $D + P_2$ est directe.

Proposition 23.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. E_1 et E_2 sont en somme directe.
2. Pour tout $x_1 \in E_1$ et tout $x_2 \in E_2$, on a l'implication : $\big(x_1 + x_2 = 0_E\big) \Longrightarrow \big(x_1 = 0_E$ et $x_2 = 0_E\big)$.

   Autrement dit, la décomposition des éléments de $E_1 + E_2$ est unique si et seulement si la décomposition de 0_E est unique.

- En pratique, pour vérifier si la somme de deux sous-espaces vectoriels est directe, on utilise la proposition suivante.

Proposition 24.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On a l'équivalence :

$$\Big(E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont en somme directe}\Big) \iff \Big(E_1 \cap E_2 = \{0_E\}\Big).$$

4.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition-Définition 25.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Autrement dit, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.
2. La somme $E_1 + E_2$ est directe, et $E_1 \oplus E_2 = E$.
3. $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $E_1 + E_2 = E$.

Quand l'une de ces assertions est vérifiée, alors toutes ces assertions sont vérifiées, et on dit que E_1 et E_2 sont **supplémentaires** dans E.

Exemple 21

1. On a $E \oplus \{0_E\} = E$, donc E et $\{0_E\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires dans E.
2. On reprend l'exemple 2 du paragraphe précédent, où D_1 et D_2 étaient deux droites de $\mathbb{R}^2$ telles que $D_1 \cap D_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. On a aussi vu que $D_1 + D_2 = \mathbb{R}^2$. Ainsi $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$, et D_1 et D_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Posons $D_3 = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$. Montrer que D_1 et D_3 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
3. On reprend l'exemple 3 du paragraphe précédent, où l'on travaillait dans $\mathbb{R}^3$ avec une droite D et deux plans P_1 et P_2.
   On a vu que la somme $P_1 + P_2$ n'est pas directe. Donc P_1 et P_2 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   On a vu que la somme $D + P_2$ est directe. On peut montrer de plus que $D \oplus P_2 = \mathbb{R}^3$ (exercice). Donc D et P_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, notons P l'ensemble des applications paires, et I l'ensemble des applications impaires. Alors P et I sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui sont supplémentaires dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Méthode.

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriel (F_1 et F_2) sont supplémentaires dans un espace vectoriel E il faut montrer que pour tout élémement de E il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
En dimension infinie on utilise souvent le raisonnement par analyse synthèse (voir exemple précédent).

- **Remarque**. Ne pas confondre « supplémentaire » et « complémentaire ». Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel.