Lycée Condorcet
PCSI

Mars 2025

Polynômes

Division euclidienne

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B

1. $A = 4X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ et $B = X^3 - X + 1$
2. $A = X^{18} - X^{15} + X^2 - 7$ et $B = X^{19} + X^{10} + X^5 + 1$
3. $A = X^n + X^{n-1} + X + 1$ et $B = (X-1)^2$ $(n \geq 2)$.
4. $A = (X-1)^n + (X+2)^n + 2$ et $B = (X-1)^n$ $(n \geq 1)$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, quel est le reste de la division euclidienne de A par B ?

1. $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ et $B = (X-1)(X+1)$, $(n \geq 1)$.
2. $aX^{n+1} + bX^n + 1$ et $B = (X-1)^2$.
3. $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ et $B = (X-1)(X+1)$.
4. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = X^2 + 1$.

Exercice 3. Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

1. $A = X^{2n} - 2nX + 1$ et $B = (X-1)^2$, $(n \geq 1)$.
2. $A = X^4 - 3X^3 - X - 7$ et $B = (X-1)^k$, $(k \in \mathbb{N})$.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X - 1$ est 2 et le reste de la division euclidienne par $X - 3$ est 3. Trouver le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 4X + 3$.

Divisibilité, racines

Exercice 5. Montrer que le polynôme B divise le polynôme A.

1. $A = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$ et $B = X^2 + X$.
2. $A = \sin(\theta)X^n - \sin(n\theta)X + \sin((n-1)\theta)$, et $B = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$, $(n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. On pose $P = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

1. Montrer que $X^2 - 3X + 2$ divise P.
2. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathbb{R}[X]$, on a $A^n - \alpha^n = (A - \alpha)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k} A^k$.
3. En se servant de la formule établie à la question précédente, déterminer le quotient de la division euclidienne de P par $(X-2)$.
4. En déduire le quotient de la division euclidienne de P par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 7. Préciser l'ordre de multiciplicité de la racine 1 dans :

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1, \quad Q = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$$

Exercice 8. d'après Central-Supélec Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation d'inconnue P un polynôme :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

1. Montrer que si P est un polynôme non nul vérifiant cette relation, alors l'ensemble de ses racines est contenu dans $\{0, -1, j, j^2\}$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 9. Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{K}[X]$

1. $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ où $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. $3X^3 + 8X^2 + 3X - 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. $X^4 - 2aX^2 + a^2$ ($a \in \mathbb{R}$), $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
4. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10. Montrer que -1 est racines triple de

$$P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$$

En déduire sa factorisation.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme :

$$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{p} cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$$

Divers

Exercice 12. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

1. $P = XP'$.
2. P' divise P.
3. $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$

Exercice 13.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1+X)^n = (1+X)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant $(1+X)^{2n}(1-X)^{2n} = (1-X^2)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

Quelques polynômes classiques

Exercice 14. (Polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ réel $x_0, \ldots, x_n$ deux à deux distincts, et $n+1$ réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note L_k le polynôme :

$$L_k = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \begin{cases} L_k(x_j) = 0, & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$

   Montrer que L_k est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant cette condition.

2. En déduire que $P = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], P(x_j) = y_j$$

Exercice 15.
Soit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_1 = 1 + X$ et pour tout entier $n \geq 2$,

$$P_n(X) = 1 + X + \ldots + \frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!}.$$

1. À l'aide de la définition, écrire les polynômes P_3, P_4 puis P_2.
2. Déterminer la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n.
3. Factoriser les polynômes P_2 et P_3.
4. Montrer alors que, pour tout $n \geq 1$, $P_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (X + k)$.

Exercice 16. (Polynômes de Tchebychev)
On considère la suite de polynôme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.
2. Déterminer le terme constant de P_n et étudier la parité de P_n.
3. Établir que , pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(\cos x) = \cos(nx)$$

4. En déduire les racines de P_n.
5. Donner alors une expression factorisée de P_n.
6. À l'aide des formules de Moivre donner une autre expression de P_n.