Ainsi :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2) = \varphi(\lambda P_1 + \mu P_2)$$

Conclusion. L'application φ est linéaire.

b/ Déterminer $\ker \varphi$. L'application φ est-elle injective ?

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$[P \in \ker \varphi] \Longleftrightarrow \left[\varphi(P) = \tilde{0}\right] \Longleftrightarrow [\text{le reste dans la D.E. de } P \text{ par } B \text{ est nul}] \Longleftrightarrow [\ B|P\ ]$$

Conclusion. $\ker \varphi = B\mathbb{R}[X]$. Le polynôme B étant non nul, on a : $\ker \varphi \neq \left\{\tilde{0}\right\}$. L'application φ n'est donc pas injective.

Problème 1 — Développements limités et polynômes

Problématique. *L'objectif de ce problème est de déterminer le développement limité à un ordre quelconque d'une certaine fonction "non-usuelle". Pour y parvenir, l'énoncé propose un joli voyage à travers le programme de Sup : intégrales, suites, développements limités, récurrences doubles, sommes, dérivées d'ordre supérieur, et comme il est indiqué dans le titre, DL et polynômes : amusez-vous bien !*

Partie 1 - Somme de la série des inverses des factorielles

On considère les suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies en posant :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_p = u_p + \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

1/ Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que $v_p = v_{p+1}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in [0,1]$, posons $u(t) = -\dfrac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$.

Selon les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et pour tout réel $t \in [0,1]$ on a $u'(t) = (1-t)^p$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. D'après la formule d'intégration par parties on a :

$$\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t\right]_0^1 + \frac{1}{p+1}\int_0^1 (1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1}\int_0^1 (1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

On en déduit que :

$$v_p = u_p + \frac{1}{(p+1)!} + \frac{1}{(p+1)!}\int_0^1 (1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = u_{p+1} + \frac{1}{(p+1)!}\int_0^1 (1-t)^{p+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = v_{p+1}$$

Conclusion. $\forall p \in \mathbb{N},\ v_{p+1} = v_p$

2/ En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} - u_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

D'après la question précédente, la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $v_0 = u_0 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}$.

En d'autres termes : $\forall p \in \mathbb{N},\ v_p = \mathrm{e}$. La conclusion s'ensuit immédiatemment.

Conclusion. $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} - u_p = \dfrac{1}{p!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$

3/ En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{e} - u_p| = \frac{\mathrm{e}}{p!}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, et par positivité de l'intégrale, on a déjà :

$$0 \leqslant \mathrm{e} - u_p \leqslant \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

Une majoration sans finesse permet d'affirmer que la fonction $t \longmapsto (1-t)^p \mathrm{e}^t$ est majorée par e sur $[0, 1]$.

On en déduit que : $0 \leqslant \mathrm{e} - u_p \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{p!}$. **Conclusion.** $\forall p \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{e} - u_p| = \dfrac{\mathrm{e}}{p!}$

4/ En déduire finalement la limite : $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \right)$

D'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} u_p = \mathrm{e}$. **Conclusion.** $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \right) = \mathrm{e}$

Partie 2 - Dérivées successives et polynômes

On note $I = \,]-\infty, 1\,[$.

Jusqu'à la fin de ce problème, f désigne la fonction définie sur I en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{1-x} \mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

5/ Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

Soit x un réel de I. Selon le cours, on a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e}^{1+x+x^2+x^3+o(x^3)}\\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{x+x^2+x^3+o(x^3)}\\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \left(1 + x + x^2 + x^3 + \frac{(x+x^2+x^3)^2}{2} + \frac{(x+x^2+x^3)^3}{6}\right) + o(x^3)\\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \left(1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)\\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{1/(1-x)} = \mathrm{e} \times \left(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6}\right) + o(x^3)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
&f(x) = \mathrm{e} \times (1 + x + x^2 + x^3) \times \left(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6}\right) + o(x^3)\\
&\Longrightarrow f(x) = \mathrm{e} \times \left(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + x + x^2 + \frac{3x^3}{2} + x^2 + x^3 + x^3\right) + o(x^3)\\
&\Longrightarrow f(x) = \mathrm{e} \times \left(1 + 2x + \frac{7x^2}{2} + \frac{17x^3}{3}\right) + o(x^3)
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall\, x \in I,\ f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + \dfrac{7\mathrm{e}x^2}{2} + \dfrac{17\mathrm{e}x^3}{3} + o(x^3)$

6/ Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

Pour tout entier naturel n notons $A(n)$ l'assertion : "$\exists\, P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$"

D'après l'énoncé : $\forall\, x \in I,\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x}\mathrm{e}^{1/(1-x)}$. Ainsi : $\forall\, x \in I,\quad f(x) = P_0\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$ en ayant posé $P_0 = X$. L'assertion $A(0)$ est donc vraie.

Supposons à présent $A(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$\forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

Selon les hypothèses et théorèmes généraux, $f^{(n+1)}$ existe sur I et on déduit de la ligne précédente (en appliquant une fois la formule donnant la dérivée d'un produit, et deux fois celle donnant la dérivée d'une composée) :

$$\forall\, x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 P'_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

D'où :

$$\forall\, x \in I,\; f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \left(P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + P'_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

Soit :

$$\forall\, x \in I,\; f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)} \quad \text{en ayant posé :} \quad P_{n+1} = X^2\,(P_n + P'_n)$$

Puisque $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ (par construction), l'assertion $A(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall\, n \in \mathbb{N},\; \exists\, P_n \in \mathbb{R}[X],\; \forall\, x \in I,\; f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{1/(1-x)}$

7/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$$

C'est une conséquence immédiate de l'hérédité dans la question précédente.

CONCLUSION. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$

8/ Préciser les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.*

D'après l'initialisation de la récurrence dans la question 6 on a : $P_0 = X$. On en déduit successivement que :

$$P_1 = X^3 + X^2\,; \qquad P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3\,; \qquad P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4.$$

CONCLUSION. $P_0 = X\,;$ $\quad P_1 = X^3+X^2\,;$ $\quad P_2 = X^5+4X^4+2X^3\,;$ $\quad P_3 = X^7+9X^6+18X^5+6X^4.$

9/ Vérifier que la fonction f est solution sur I de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x)^2\, y' = (2-x)\, y$$

Immédiat.

10/ Etablir que pour tout réel x de I, et pour tout entier naturel n non nul on a :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

La fonction f et les fonctions polynomiales étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, on peut appliquer la formule de Leibniz terme à terme sur l'égalité de la question précédente pour obtenir la conclusion.

CONCLUSION. $\forall\,(x,n) \in I \times \mathbb{N}$,

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

---

*. Indication : on a $P_0 = X$.

11/ Etablir que pour tout entier naturel n on a :

$$P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n - n^2X^2P_{n-1}$$

Soit $(x, n) \in I \times \mathbb{N}$. D'après les questions 8 et 10, on a :

$$(1-x)^2P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)} - 2n(1-x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)} + n(n-1)P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$
$$= (2-x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)} - nP_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $\mathrm{e}^{1/(1-x)}(1-x)^2$, on obtient

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - 2n\frac{1}{1-x}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + n(n-1)\frac{1}{(1-x)^2}P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$= (2-x)\frac{1}{1-x}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) - n\frac{1}{1-x}P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

D'où :

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \left((2n+1)\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\right)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + n^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$$

Donc, comme $x \mapsto 1/(1-x)$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}_+^*$,

le polynôme $P_{n+1} - \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n + n^2X^2P_{n-1}$ possède une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n - n^2X^2P_{n-1}$

12/ Etablir que pour tout entier naturel n, le polynôme P_n est unitaire et de degré $2n+1$.

Par récurrence, de la même manière qu'en colle pour les polynômes de Tchebychev.
Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = 2n+1$ et $\mathrm{cd}(P_n) = 1$.

Partie 3 - Développement limité de f à l'ordre n en 0

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$.

13/ Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.

Soit n un entier naturel. On a : $f^{(n)}(0) = P_n(1)\mathrm{e}$. Or, d'après la question 11 :

$$P_{n+1}(1) = 2(n+1)P_n(1) - n^2P_{n-1}(1)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2a_{n-1}$

14/ Développement limité à l'ordre 4 en 0 de f.

a/ En utilisant la définition de P_n et la question 8, déterminer les valeurs de a_0, a_1, a_2 et a_3.

D'après la question 8 et la formule de Taylor-Young on a :

$$a_0 = \mathrm{e}\,; \quad a_1 = 2\mathrm{e}\,; \quad a_2 = 7\mathrm{e} \text{ et } a_3 = 34\mathrm{e}$$

b/ En déduire la valeur de a_4, puis le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

D'après les deux questions précédentes : $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209\mathrm{e}$. Il s'ensuit que :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + \frac{7\mathrm{e}x^2}{2} + \frac{17\mathrm{e}x^3}{3} + \frac{209\mathrm{e}x^4}{24} + o(x^4)$$

15/ Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

a/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ en fonction de u_p et u_{p-1} (où $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ désigne la suite introduite dans la partie 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'une part : $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p$.

D'autre part :

$$S_p(1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)\times i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} + \sum_{i=0}^{p} \frac{i \times i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i-1)!}$$

Finalement : $\quad S_p(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} = u_p + u_{p-1}$

Conclusion. $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ S_p(0) = u_p$ et $S_p(1) = u_p + u_{p-1}$.

b/ Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, et déterminer leurs limites.

D'après la question précédente et la question 4 : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(0) = \mathrm{e}$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p(1) = 2\mathrm{e}$.

16/ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Etablir que :

$$S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1)=S_{p-1}(n)-S_p(n)$$

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On a :

$$S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1)=\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+1+i)!-(2n+2)(n+i)!+n^2\,(n-1+i)!}{(i!)^2}$$

Or, pour tout $i\in[\![\,1,p\,]\!]$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1+i)!-(2n+2)(n+i)!+n^2\,(n-1+i)!}{(i!)^2}&=\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left[(n+1+i)(n+i)-(2n+2)(n+i)+n^2\right]\\&=\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left[n^2+in+n+i+in+i^2-2n^2-2ni-2n-2i+n^2\right]\\&=\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left[i^2-in-n\right]\\&=\frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2}-\frac{(n+i)!}{(i!)^2}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1)&=-n!+\sum_{i=1}^{p}\frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2}-\sum_{i=1}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}\\&=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}-\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1)=S_{p-1}(n)-S_p(n)$

17/ En déduire, à l'aide d'une récurrence double, que la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion "la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente".

Initialisation ($n=0$ et $n=1$). Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ sont convergentes d'après la question 15-b.

Hérédité. Supposons les assertions $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. D'après la question précédente, on a :

$$\forall\,p\in\mathbb{N},\quad S_p(n+2)=(2n+4)S_p(n+1)-(n+1)^2S_p(n)+S_{p-1}(n+1)-S_p(n+1)$$

Il s'ensuit que la suite $(S_p(n+2))_{p\in\mathbb{N}}$ converge, en tant que combinaison linéaire de suites convergentes (par hypothèse de récurrence).

En résumé : $(\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1))\Longrightarrow\mathscr{P}(n+2)$. Récurrence établie.

Conclusion. La suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout entier naturel n.

18/ Prouver que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

Puisque les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ sont convergentes pour tout entier naturel n, on peut passer à la limite dans la relation de la question 16.

Explicitement, en notant $b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_p(n)$, on obtient :

$$b_{n+1} - (2n+2)b_n + n^2 b_{n-1} = 0$$

D'après la question 13, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence double.

En outre : $a_0 = \mathrm{e} = b_0$, et $a_1 = 2\mathrm{e} = b_1$ d'après les questions 14-a et 15-b.

Par suite : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n$. D'où : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_p(n)$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = \lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{p} \dfrac{(n+i)!}{(i!)^2}$