Problème 1 — Développements limités et polynômes

Problématique. *L'objectif de ce problème est de déterminer le développement limité à un ordre quelconque d'une certaine fonction "non-usuelle". Pour y parvenir, l'énoncé propose un joli voyage à travers le programme de Sup : intégrales, suites, développements limités, récurrences doubles, sommes, dérivées d'ordre supérieur, et comme il est indiqué dans le titre, DL et polynômes : amusez-vous bien !*

Partie 1 - Somme de la série des inverses des factorielles

On considère les suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies en posant :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_p = u_p + \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

1/ Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que $v_p = v_{p+1}$.

2/ En déduire que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} - u_p = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

3/ En déduire que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{e} - u_p| = \frac{\mathrm{e}}{p!}$$

4/ En déduire finalement la limite : $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\right)$

Partie 2 - Dérivées successives et polynômes

On note $I =]-\infty, 1[$.

Jusqu'à la fin de ce problème, f désigne la fonction définie sur I en posant :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

5/ Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

6/ Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{1/(1-x)}$$

7/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = X^2\left(P_n + P_n'\right)$$

8/ Préciser les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.*

∗. Indication : on a $P_0 = X$.

9/ Vérifier que la fonction f est solution sur I de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x)^2\, y' = (2-x)\, y$$

10/ Etablir que pour tout réel x de I, et pour tout entier naturel n non nul on a :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

11/ Etablir que pour tout entier naturel n on a :

$$P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right]\, P_n - n^2X^2P_{n-1}$$

12/ Etablir que pour tout entier naturel n, le polynôme P_n est unitaire et de degré $2n+1$.

Partie 3 - Développement limité de f à l'ordre n en 0

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$.

13/ Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.

14/ **Développement limité à l'ordre 4 en 0 de f.**

- **a**/ En utilisant la définition de P_n et la question 8, déterminer les valeurs de a_0, a_1, a_2 et a_3.
- **b**/ En déduire la valeur de a_4, puis le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

15/ Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

- **a**/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ en fonction de u_p et u_{p-1} (où $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ désigne la suite introduite dans la partie 1.
- **b**/ Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, et déterminer leurs limites.

16/ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Etablir que :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

17/ En déduire, à l'aide d'une récurrence double, que la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout entier naturel n.

18/ Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$