Lycée Condorcet
PCSI

Polynômes

Exercice 8. D'après Central-Supélec
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation d'inconnue P un polynôme :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

1. **Montrer que si P est un polynôme non nul vérifiant cette relation, alors l'ensemble de ses racines est contenu dans $\{0, -1, j, j^2\}$.**
2. **En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.**

Corrigé :

1. Supposons que P soit une solution non nulle de l'équation.

   Notons que si un réel α est racine de P alors comme

   $$P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha - 1) = 0$$

   Alors α^2 est une racine de P.
   Par un raisonnement par récurrence on montre alors que si α est racine de P alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, α^{2^n} est racine de P.

   Or si $|\alpha| > 1$ alors la suite $(|\alpha|^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc P admet une infinité de racines ce qui est en contradiction avec P non nul.

   De même si $0 < |\alpha| < 1$ alors la suite $(|\alpha|^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et P admet encore une infinité de solutions.

   On en déduit que si α est racine de P alors $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.

   On montre ensuite que si α est racine alors $(\alpha + 1)^2$ est racine de P. En effet si α est racine on a :

   $$P((\alpha + 1)^2) = P(\alpha + 1)P(\alpha + 1 - 1) = 0$$

   Supposons que α soit racine de P alors comme $(\alpha + 1)^2$ est encore racine de P, $|(\alpha + 1)|^2$ est soit égal à 0 soit à 1. Or on a :

   - $|\alpha + 1|^2 = 0$ si et seulement si $\alpha + 1 = 0$ si et seulement si $\alpha = -1$
   - Considérons maintenant $|\alpha + 1|^2 = 1$ c'est à dire $|\alpha + 1| = 1$.
     Si $\alpha = 0$ on a bien $|\alpha + 1| = 1$. Si $|\alpha| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = e^{i\theta}$. Mais en utilisant la méthode de l'angle moitié on obtient :

     $$|\alpha + 1| = 2|\cos(\theta/2)|$$

     En résolvant l'équation

     $$2|\cos(\theta/2)| = 1$$

     On obtient $\alpha = j$ ou $\alpha = j^2$.

   Ainsi si α est une racine de P alors c'est un élément de $\{0, -1, j, j^2\}$.

2. Supposons que P vérifie l'équation.
   Notons que si 0 est racine de P alors $(0+1)^2 = 1$ est aussi racine de P. Ce qui, d'après la question précédente, est impossible. Ainsi 0 n'est pas racine de P.
   De même si -1 est racine de P alors $(-1+1)^2 = 0$ est encore racine de P. Impossible par ce que nous venons de dire. Donc -1 n'est pas racine de P.

   Ainsi finalement les seules racines possibles de P sont j et j^2.

   Finalement les seuls polynômes pouvant être solution de l'équation s'écrivent :

$$\lambda(X-j)^n(X-j^2)^m$$

   Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ (*Notez que ces polynômes peuvent éventuellement ne pas avoir de racines*).
   Nous venons ici de faire la partie analyse d'un raisonnement d'analyse synthèse. Procédons maintenant à la partie synthèse.
   Il s'agit de résoudre l'équation d'inconnues $\lambda \in \mathbb{R}, (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\lambda(X^2-j)^n(X-j^2)^m = \lambda(X-j)^n(X-j^2)^m\lambda(X-1-j)^n(X-1-j^2)^m$$

   Rappelons que $1+j+j^2 = 0$. Avec les identités remarquables on en déduit que cette égalité est équivalente à

$$\lambda(X-j)^n(X+j)^n(X-j)^n(X-j^2)^m(X+j^2)^m = \lambda^2(X-j)^n(X-j^2)^m(X+j^2)^n(X+j)^m$$

   Par unicité de la décomposition en éléments simples on déduit que cette égalité est équivalente à

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & \lambda^2 \\ n & = & m \\ m & = & n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & 1 \text{ ou } 0 \\ n & = & m \end{array}\right.$$

   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équations est :

$$\boxed{\left\{(X-j)^n(X-j^2)^n, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}}$$

Exercice 14.

1.
2. Vérifions tout d'abord que P vérifie bien la propriété annoncée. Soit $j \in [\![0,n]\!]$. On a, par définition de P :

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_j) = y_j L_j(x_j) + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} y_k L_k(x_j)$$

   Or d'après la question précédente pour tout $k \in [\![0,n]\!]$

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \left\{\begin{array}{ll} L_k(x_j) = 0, & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 & \end{array}\right.$$

   Ainsi on a bien :

$$\boxed{P(x_j) = y_j}$$

   Montrons maintenant l'unicité.
   Soit P_2 un polynôme vérifiant cette propriété. On a alors, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$:

$$(P-P_2)(x_j) = P(x_j) - P_2(x_j) = y_j - y_j = 0$$

   Ainsi $P-P_2$ admet $n+1$ racines mais les degré de P et P_2 sont inférieurs à n donc $\deg(P-P_2) \leq n$. On en déduit que $P-P_2 = 0$. Un tel polynôme est donc unique.

Exercice 16. (Polynômes de Tchebychev)
On considère la suite de polynôme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \textbf{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.**
2. **Déterminer le terme constant de P_n et étudier la parité de P_n.**
3. **Établir que , pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:**
$$P_n(\cos x) = \cos(nx)$$
4. **En déduire les racines de P_n.**
5. **Donner alors une expression factorisée de P_n.**
6. **À l'aide des formules de Moivre donner une autre expression de P_n.**

Correction

1. Faisons une récurrence double sur n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A(n)$ l'assertion :
$$\text{A(n) : ' Le polynôme } P_n \text{ est de dégré } n \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n-1}$$
Initialisation :
Par définition $P_1 = X$ donc P_1 est bien de degré 1 et son coefficient dominant est $1 = 2^{1-1}$.
De même $P_2 = 2X^2 - 1$ donc P_2 est bien de degré 2 et son coefficent dominant est $2 = 2^{2-1}$.
Les assertions $A(1)$ et $A(2)$ sont vraies.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $A(n)$ et $A(n+1)$ sont vraies et montrons que $A(n+2)$ est vraie.
Par définition de P_{n+2} on a :
$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$
Par hypothèse de récurrence on a $\deg P_n = n$ et $\deg P_{n+1} = n+1$, d'où $\deg 2XP_{n+1} = n+2$. Donc les polynômes P_n et $2XP_{n+1}$ sont de degré différent on a donc :
$$\deg P_{n+2} = \max(\deg 2XP_{n+1}, \deg P_n) = n+2$$
De même, comme les polynômes P_n et $2XP_{n+1}$ sont de degré différents, le coefficient dominant est le coefficient dominant de P_{n+2} est le coefficient domninant de $2XP_{n+1}$, or par hypothèse de récurrence, onsait que le coefficient domninant de P_{n+1} est 2^n. D'où celui de P_{n+2} est 2^{n+1}.
On a ainsi montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $A(n)$ et $A(n+1)$ sont vraies, alors $A(n+2)$ est vraie.
Le principe de récurrence double permet ainsi de conclure que $A(n)$ est vriae pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. A près l'étude des premiers termes de la suite de polynômes on peut conjecturer que si n est pair P_n est pair et son terme constant est égal à $(-1)^{n/2}$, et que si n est impair, alors P_n est impair et son coefficient constant est 0.
Nous allons le montrer par récurrence double. On note $B(n)$ l'assertion précédente.
Initialisation :
L'application qui à x associe 1 est paire et le coefficient dominant de P_0 est $1 = 1^{0/2}$, donc $B(0$ est vraie.
De même l'application qui à x associe x est impaire et le coefficient constant de P_1 est nul, ainsi $B(1)$ est vraie.
Hérédítié :
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $B(n)$ et $B(n+1)$ vraie et déduisons en $B(n+2)$.
Procédons à une disjonction de cas.

— Supposons, tout d'abord que n est pair, dans ce cas $n+1$ est impair et $n+2$ est pair. On a, par définition,

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Considérons les fonctions polynômiales associées et montrons que P_{n+2} est paire. l'ensemble de définition de ces fonctions est $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$P_{n+2}(-x) \quad = \quad 2(-x)P_{n+1}(-x) - P_n(-x)$$

Mais on a supposé P_{n+1} impaire et P_n paire, on a donc

$$\begin{array}{rcl} P_{n+2}(-x) & = & 2(-x)(-P_{n+1}(x)) - P_n(x) \\ & = & P_{n+2}(x) \end{array}$$

De plus le polynôme $2XP_{n+1}$ a un coefficient constant égal à 0. Ainsi le coefficient constant de P_{n+2} est égal à celui de $-P_n$, or par hypothèse de récurrence, et comme n est pair, le coefficient constant de P_n est $(-1)^{n/2}$ donc celui de P_{n+2} est $-(-1)^{n/2} = (-1)^{n/2+1} = (-1)^{(n+2)/2}$.
Ainsi, si n est pair et $B(n)$ et $B(n+1)$ sont vraies, alors $A(n+2)$ est vraie.

— Supposons maintenant que n est impair. Dans ce cas $n+1$ est pair et $n+2$ est impair.
Comme tout à l'heure l'ensemble de définition la fonction polynômiale associée à P_{n+2} est $\mathbb{R}$ donc symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} P_{n+2}(-x) & = & 2(-x)(P_{n+1}(-x)) - P_n(-x) \\ & = & -2xP_{n+1}(x) + P_n(x) \\ & = & -P_{n+2}(x) \end{array}$$

L'avant dernière égalité est obtenue car, par hypothèse de récurrence P_n est impaire et P_{n+1} est paire.
Donc P_{n+2} est bien impaire.
Comme P_{n+2} est impaire, on a $P_{n+2}(0) = 0$, ainsi le coefficient constant de P_{n+2} est nul.

3. Montrons, par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'assertion $C(n)$:

$$C(n) : \text{"}P_n(\cos(x)) = \cos(nx)\text{"}$$

Initialisation :
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P_0(\cos(x)) = 1$$

puisque P_0 est le polynôme constant.
D'autre part,

$$\cos(0x) = \cos(0) = 1$$

L'assertion $C(0)$ est donc vraie.
De même on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_1(\cos(x)) = \cos(x)$$

Par définition de P_1, donc $C(1)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $C(n)$ et $C(n+1)$ vraies et déduisons en $C(n+2)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, par définition de P_{n+2}.

$$P_{n+2}(\cos(x)) = 2\cos(x)P_{n+1}(\cos(x)) - P_n(\cos(x))$$

Ainsi, comme on a supposé $C(n)$ et $C(n+1)$ vraies, on a :

$$P_{n+2}(\cos(x)) \quad = \quad 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$$

Mais, on a, d'après les formules d'addition du cosinus :

$$\cos(nx) = \cos((n+1)x - x) = \cos((n+1)x)\cos(x) + \sin((n+1)x)\sin(x)$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(x)) &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x) \\ &= \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x) \end{aligned}$$

On reconnaît alors une formule d'addition :

$$\cos((n+2)x) = \cos((n+1)x + x) = \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x)$$

Ainsi on a bien :

$$P_{n+2}(\cos(x)) = \cos((n+2)x)$$

Et $C(n+2)$ est vraie.
Le principe de récurrence double permet ainsi d'en déduire que $C(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que P_n est de degré n ainsi P_n admet au plus n racines.
Notons que, d'après la question précédente, si $\cos(nx) = 0$ alors $\cos(x)$ est une racine de P_n. Or pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a :
$$\cos\left(n\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$
De plus pour tout $(k, k') \in [\![0, n-1]\!]^2$, si $k \neq k'$ alors
$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \neq \cos\left(\frac{(2k'+1)\pi}{2n}\right)$$
En effet, on a
$$\frac{(2k+1)\pi}{2n} \neq \frac{(2k'+1)\pi}{2n} \quad [2\pi]$$
Ainsi, les éléments de l'ensemble $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ sont les n racines distinctes de P_n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, nous avons montrer que le coefficient dominant de P_n était 2^{n-1}, et que les racines de P_n étaient les éléments de l'ensemble $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$, l forme factorisée de P_n est donc :
$$P_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$P_n(\cos(x) = \cos(nx)$$
Or d'après la formule de Moivre, on a :
$$\cos(nx) = Re(\cos(x) + i\sin(x)^n)$$
Mais d'après le binôme de Newton on a,
$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k(x)(i\sin(x))^{n-k}$$
Or, pour tout k impair $i^k \in i\mathbb{R}$ et pour tout k pair, $i^k = (-1)^{k/2}$, la partie réel de $(\cos(x) + i\sin(x))^n$ est donc égale à
$$Re(\cos(x) + i\sin(x))^n = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k}\cos^k(x)(-1)^{k/2}\sin^k(x)$$

En procédant au changement d'indice $k' = k/2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
Re(\cos(x) + i\sin(x))^n &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{2k}(x)(-1)^k \sin^{2k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{2k}(x)(-1)^k (1-\cos^2(x))^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{2k}(x)(\cos^2(x)-1)^k
\end{aligned}$$

Considérons le polynôme T_n défini par :

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} X^2(X^2-1)^k$$

D'après ce que nous venons de montrer, on , pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(\cos(x) - T_n(\cos(x)) = 0$$

Ainsi, le polynôme $T_n - P_n$ admet une infinité de racines c'est donc le polynôme nul. On a ainsi,

$$P_n = T_n$$