Lycée Condorcet — 21 mars 2025
PCSI

DS8 mathématiques
Problèmes

3 heures

Problème I

Dans ce problème on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange :

Proposition 1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$ tels que $a < b$. On suppose que f est n fois dérivable sur le segment $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $y \in]a, b[$, $| f^{(n+1)}(y) | \leq M$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Première partie : un exemple

Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Et par convention on pose, $Q_{-1}(x) = 0$.

(a) Comparer P_n' et Q_{n-1} d'une part et Q_n' et P_n d'autre part.

(b) Écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les quantités $P_n(x) - P_{n-1}(x)$ et $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ en fonction de $Q_n(x) - Q_{n-1}(x)$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et établir, pour $x \neq 0$, les formules :

$$h^{(2n)}(x) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \left(P_n(x) \sin x - Q_{n-1}(x) \cos x \right),$$

$$h^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}} \left(Q_n(x) \cos x - P_n(x) \sin x \right).$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la limite des fonctions $h^{(2n)}$ et $h^{(2n+1)}$ en 0 (on pourra utiliser les DL de sin et cos). En déduire que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$:

$$f^{(k)}(0) = 0$$

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note I l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$.
   Justifier qu'il existe un réel $M_{n+1}(x)$ tel que

   $$\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}(x)$$

2. Montrer que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$:

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(p)}(x)| \leq \frac{x^{n-p+1}}{(n-p+1)!} M_{n+1}(x).$$

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a l'égalité :

   $$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k! x^{-(k+1)} f^{(n-k)}(x).$$

   On pourra considérer le produit de deux fonctions.
4. Étudier la limite de $g^{(n)}(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Troisième partie

On étend le résultat de la deuxième partie. Pour cela, on considère m un entier non nul et on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$g_m(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^m} \left[f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] & , \text{ si } x \neq 0 \\ \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!} & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que g_1 est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g_1 est dérivable en 0 et calculer $g_1'(0)$.
   (c) Montrer que g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que g_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite on admettra que g_1 est de classe $\mathcal{C}^{n+m-1}$ et que pour tout $p \in [\![0, n+m-1]\!]$

   $$g_1^{(p)}(0) = \frac{f^{(p+1)}(0)}{p+1}$$

2. En convenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_0(x) = f(x)$ montrer que

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g_m(x) = \frac{1}{x}(g_{m-1}(x) - g_{m-1}(0)).$$

3. Montrer que g_m est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n inclus.

Problème II

Partie I. Préliminaire calculatoire.

Pour tout réel x et tout entier naturel k, on définit

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$$

avec $\binom{x}{0} = 1$.

1. Donner la valeur de $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ pour $k=1$, $k=2$ et $k=3$. em
2. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$
$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$$

Partie II. Une étude de fonction.

On s'intéresse dans cette partie à la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer le DL à l'ordre n de l'application $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'aide des $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
4. En déduire le DL à l'ordre $n+1$ en 0 de $x \mapsto \sqrt{1-4x}$, puis calculer le DL à l'ordre n de f en 0. On donnera explicitement le DL à l'ordre 4 de f en 0.
5. Déduire que le prolongé par continuité de f en 0 est dérivable en 0. Donner l'équation de sa tangente et la position du grape de f par rapport à la tangente.

Partie III. Dénombrement des expressions bien parenthésées.

On s'intéresse dans cette partie à des suites de symboles constituées uniquement de parenthèses ouvrantes et fermantes qui sont **bien parenthésées**, c'est à dire qui vérifient les deux conditions suivantes :

- il y a autant de (que de).
- chaque parenthèse ouvrante est refermée par une parenthèse fermante située après la parenthèse ouvrante. Autrement dit, lorsqu'on lit la suite de caractères de gauche à droite, on a en permanence croisé au moins autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.
  Par convention on considèrera que l'ensemble vide est bien parenthésé.

Ainsi la suite (()()) est bien parenthésée alors que ())(() ne l'est pas.
Pour tout entier naturel n on note c_n le nombre de suites de parenthèses de longueur $2n$ qui sont bien parenthésées.

1. Donner la valeur de c_0, c_1, c_2 et c_3 en faisant la liste des suites de parenthèses convenables (on devrait trouver $c_3 = 5$).
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$$
3. Montrer que la fonction f étudiée dans la partie II vérifie l'équation :
$$\forall x \in D_f, \qquad f(x) = 1 + x(f(x))^2.$$
4. En déduire que les coefficients de son DL d'ordre n en 0 sont les nombres c_k (on exploitera la relation précédente et l'unicité DL en 0 d'une fonction).
5. En déduire une expression explicite de c_n en fonction de n.