Lycée Condorcet — 21 mars 2025
PCSI

DS8 mathématiques
Problèmes

3 heures

Problème I

Dans ce problème on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange :

Proposition 1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$ tels que $a < b$. On suppose que f est n fois dérivable sur le segment $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $y \in]a, b[$, $| f^{(n+1)}(y) | \leq M$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Première partie : un exemple

Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \textbf{si } x \neq 0 \\ 1 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$$

1. **Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.**
2. **On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Et par convention on pose, $Q_{-1}(x) = 0$.

(a) **Comparer P_n' et Q_{n-1} d'une part et Q_n' et P_n d'autre part.**

(b) **Écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les quantités $P_n(x) - P_{n-1}(x)$ et $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ en fonction de $Q_n(x) - Q_{n-1}(x)$.**

(c) **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et établir, pour $x \neq 0$, les formules :**

$$h^{(2n)}(x) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \left(P_n(x) \sin x - Q_{n-1}(x) \cos x \right),$$

$$h^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}} \left(Q_n(x) \cos x - P_n(x) \sin x \right).$$

(d) **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la limite des fonctions $h^{(2n)}$ et $h^{(2n+1)}$ en 0 (on pourra utiliser les DL de $\sin$ et $\cos$). En déduire que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.**

Corrigé :

1. • Étude en sur $\mathbb{R}^*$.
   Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction h est un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad h'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

- En 0.
  On rappelle que la fonction sin admet le DL suivant en 0 :
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
  Ainsi h admet en 0 le DL suivant :
$$h(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$
  Notons que, par définition, $h(x) = 1$ ainsi h est bien continue.
  Comme h admet en 0 un DL à l'ordre 2, elle est, e particulier dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.
  Montrons maintenant qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela on calcule le DL de h' en 0. D'après les DL en 0 de cos et sin on a :
$$\begin{aligned} x\cos x - \sin x &= x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= -\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$
  Ainsi par quotient :
$$h'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$$
  On a donc bien
$$\lim_{x\to 0} h'(x) = 0$$
  La fonction h' est continue donc h est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

2. (a) On a, après calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$P_n' = -Q_{n-1} \text{ et } Q_n' = P_n$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a les égalités :
$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad P_{n+1}(x) - P_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$
$$\text{et } Q_n(x) - Q_{n-1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
   On en déduit :
$$\boxed{P_n(x) - P_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x}(Q_n(x) - Q_{n-1}(x))}$$
$$\boxed{P_{n+1}(x) - P_n(x) = -\frac{x}{2n+2}(Q_n(x) - Q_{n-1}(x))}$$
   (c) La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ car c'est un quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrons par récurrence que l'assertion $A(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$A(n) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \begin{aligned} h^{(2n)}(x) &= \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \left(P_n(x)\sin x - Q_{n-1}(x)\cos x\right), \\ h^{(2n+1)}(x) &= \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}} \left(Q_n(x)\cos x - P_n(x)\sin x\right) \end{aligned} \text{"}$$
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$P_0(x) = 1, Q_{-1}(x) = 0 \text{ et } Q_0(x) = x$$
   On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$$h(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{0!}{x^1}\left(P_0(x)\sin x - Q_{-1}(x)\cos x\right)$$
$$h'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{1!}{x^2}\left(Q_0(x)\cos x - P_0(x)\sin x\right)$$
   Ainsi $A(0)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $A(n)$ vraie. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$h^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}} \left(Q_n(x)\cos x - P_n(x)\sin x\right)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a donc,, $h^{2n+2}(x)$ est égal à :

$$\frac{(2n+1)!x^{2n+1}}{x^{4n+4}}\Big[\big(Q_n'(x)\cos x - Q_n(x)\sin x - P_n'(x)\sin x - P_n(x)\cos(x)\big)x - (2n+2)\big(Q_n(x)\cos x - P_n(x)\sin x\big)\Big]$$
$$= \frac{(2n+1)!}{x^{4n+3}}\Big[\cos x\big(x(Q_n'(x)-P_n(x)) - (2n+2)Q_n(x)\big) + \sin(x)\big(x(-Q_n(x)-P_n'(x)) + (2n+2)P_n(x)\big)\Big]$$

mais on a vu à la question 2.(a) que
$$Q_n' = P_n \text{ et } P_n' = -Q_{n-1}$$

De plus, d'après la question 2.(b),
$$x(-Q_n(x)+Q_{n-1}) = (2n+2)(P_{n+1}(x)-P_n(x))$$

D'où
$$h^{2n+2}(x) \quad = \quad \frac{(2n+1)!}{x^{2n+3}}\Big(-(2n+2)Q_n(x)\cos x + \sin(x)\big((2n+2)(P_{n+1}(x)-P_n(x)\big) + (2n+2)P_n(x)\Big)$$

On a donc bien
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, h^{(2n+2)}(x) = \frac{(2n+2)!}{x^{2n+3}}\Big(P_{n+1}(x)\sin x - Q_n(x)\cos x\Big)$$

En dérivant à nouveau cette expression on obtient si $x \in \mathbb{R}^*$:

$$h^{(2n+3}(x) = \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}}\Big[\cos x\Big(x(P_{n+1}(x)-Q_n'(x))+(2n+3)Q_n(x)\Big)+\sin(x)\Big(x(P_{n+1}'(x)+Q_n(x))-(2n+3)P_{n+1}(x)\Big)\Big]$$

Mais on a vu que
$$Q_n' = P_n \quad \text{et } x(P_{n+1}(x)-P_n(x)) = (2n+3)(Q_{n+1}(x)-Q_n(x))$$

et
$$P_{n+1}' = -Q_n$$

On a ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h^{2n+3}(x) = \frac{(2n+3)!}{x^{2n+3}}\Big(Q_{n+1}(x)\cos x - P_{n+1}(x)\sin x\Big)$$

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que l'assertion $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, notons que
$$\cos x = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$
$$\sin x = Q_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

D'où
$$\begin{aligned}
h^{2n}(x) &= \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\Big(P_n(x)Q_n(x) - Q_{n-1}(x)P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})\Big)\\
&= \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\Big(P_n(x)(Q_n(x)-Q_{n-1}(x))\Big) + \underset{x\to 0}{o}(1)\\
&= \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\Big(P_n(x)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n\Big) + \underset{x\to 0}{o}(1)\\
&= \frac{(-1)^n}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(1)
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\lim_{x\to 0} h^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

On a de la même manière que

$$\begin{aligned}
h^{(2n+1)}(x) &= \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}}\Big[Q_n(x)P_{n+1}(x) - P_n(x)Q_n(x) + \underset{x\to 0}{(}x^{2n+2})\Big]\\
&= \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}}\Big[Q_n(x)(P_{n+1}(x)-P_n(x))\Big] + \underset{x\to 0}{o}(1)\\
&= \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}}\Big[Q_n(x)\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}\Big] + \underset{x\to 0}{o}(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} h^{(2n+1)}(x) = 0}$$

Montrons par récurrence que h est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
On a montrer à la question 1. que h était continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, siupposons h de classe $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
Nous avons déjà montrer que h était de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit alors de montrer que $h^{(n)}$ est bien dérivable en 0 et que la dérivée est bien continue en 0.
Par hupothèse de récurrence $h^{(n)}$ est bien continue en 0. Or nous venons de montrer que $h^{(n+1)}$ admettait une limite en 0. Ainsi d'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction $h^{(n)}$ est bien dérivable en 0 et la dérivée est bien continue en 0.
Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$:

$$f^{(k)}(0) = 0$$

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , \textbf{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \textbf{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. **Soit $x \in \mathbb{R}$. On note I l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$.**
   Justifier qu'il existe un réel $M_{n+1}(x)$ tel que

$$\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}(x)$$

2. **Montrer que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$:**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(p)}(x)| \leq \frac{x^{n-p+1}}{(n-p+1)!} M_{n+1}(x).$$

3. **Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a l'égalité :**

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k! x^{-(k+1)} f^{(n-k)}(x).$$

   On pourra considérer le produit de deux fonctions.
4. **Étudier la limite de $g^{(n)}(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.**

Corrigé :

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi la fonction $f^{(n+1)}$ existe et est continue. L'intervalle I est fermé borné ainsi f est bornée. D'où l'existence d'un tel $M_{n+1}(x)$.
2. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On utilise la formule de Taylor pour la fonction $f^{(p)}$ entre 0 et x. Sur l'intervalle I elle est bien de classe $\mathcal{C}^{n-p+1}$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, d'où

$$\left| f^{(p)}(x) - \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(f^{(p)})^{(k)}(0)(x-0)^k}{k!}, \right| \leq \frac{M_{n+1}(x)|x|^{n-p+1}}{(n-p+1)!}$$

   Mais, pour tout $k \in [\![0, n-p]\!]$, $(f^{(p)})^{(k)}(0) = f^{(p+k)}(0) = 0$. d'où

$$\boxed{\left| f^{(p)}(x) \right| \leq \frac{M_{n+1}(x)|x|^{n-p+1}}{(n-p+1)!}}$$

3. On applique la formule de Leibniz au produit de f par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
   Notons que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ sa dérivée k-ième est

$$x \mapsto (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$$

   On a alors immédiatement l'expression cherchée.

4. D'après les questions 1., 2. de la deuxième partie et l'inégalité triangulaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$|g^{(n)}(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \left| \frac{x^{-(k+1)} x^{k+1}}{(k+1)!} \right| M_{n+1}(x)$$

Ainsi

$$|g^{(n)}(x)| \leq M_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

Mais par définition on a :

$$M_{n+1}(x) = \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(x)|$$

Or f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ donc $f^{(n+1)}$ est continue en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$ ainsi par définition de la limite on a

$$M_{n+1}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que $g^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
On conclue au caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction g sur $\mathbb{R}$ par récurrence sur k. L'hérédité s'obtient grâce au théorème de la limite de la dérivée.

Troisième partie

On étend le résultat de la deuxième partie. Pour cela, on considère m un entier non nul et on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$g_m(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^m} \left[f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] & , \textbf{ si } x \neq 0 \\ \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!} & , \textbf{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que g_1 est continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que g_1 est dérivable en 0 et calculer $g_1'(0)$.
(c) Montrer que g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(d) Montrer que g_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dans la suite on admettra que g_1 est de classe $\mathcal{C}^{n+m-1}$ et que pour tout $p \in [\![0, n+m-1]\!]$

$$g_1^{(p)}(0) = \frac{f^{(p+1)}(0)}{p+1}$$

2. En convenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_0(x) = f(x)$ montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g_m(x) = \frac{1}{x}(g_{m-1}(x) - g_{m-1}(0)).$$

3. Montrer que g_m est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n inclus.

Corrigé :

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ f'(0) & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(a) la fonction g_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions conitnues (f est continue).
Comme f est dérivable en 0 la limite du taux d'accroissement en 0 tend vers $f'(0)$. La fonction g_1 est donc continue en 0.

(b) En utilisant la formule de Taylor Young (f est de classe $\mathcal{C}^{n+m}$) pour f en 0 à l'ordre 2, on obtient :

$$g_1(x) = f'(0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2} x + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

Ainsi g_1 admet un DL à l'ordre 1 elle est donc dérivable en 0 et $g_1'(0) = \dfrac{f^{(2)}(0)}{2}$.

(c) Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$g_1'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$$

D'après la formule de Taylor-Young on a

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{2} + x^2\frac{f^{(2)}(0)}{2} + x^3\frac{f^{(3)}(0)}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$f'(x) = f'(0) + xf^{(2)}(0) + x^2\frac{f^{(3)}(0)}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et donc

$$xf'(x) = xf'(0) + x^2 f^{(2)}(0) + x^3\frac{f^{(3)}(0)}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

On obtient ainsi le DL à l'ordre 1 de g_1'

$$g_1'(x) = \frac{f^{(2)}(0)}{2} + x\frac{f^{(3)}(0)}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Ce qui montre que g_1' est continue en 0, ainsi g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$.

(d) Comme g_1' admet un DL à l'ordre 1, elle est dérivable en 0 et

$$g_1''(0) = \frac{f^{(3)}(0)}{3}$$

Sur $\mathbb{R}^*$, g_1 est deux fois dérivable comme somme quotient d'application dérivables.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, soit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ on , par défition de $g_{m-1} = \dfrac{1}{x^{m-1}}\left[f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]$ d'où

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{x}\big(g_{m-1}(x) - g_{m-1}(0)\big) &= \frac{1}{x^m}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right] - \frac{1}{x}\times\frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}\\ &= \frac{1}{x^m}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k - \frac{f^{m-1}(0)}{(m-1)!}x^{m-1}\right]\end{aligned}$$

on a donc bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \frac{1}{x}\big(g_{m-1}(x) - g_{m-1}(0)\big) = g_m(x)}$$

3. Démontrons le résultat par récurrence.

Nous allons utiliser le résultat admis à la question 1., c'est à dire si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}$ alors la fonction :

$$h_1(x) = \begin{cases}\dfrac{h(x)-h(0)}{x} & \text{, si } x \neq 0\\ h'(0) & \text{, si } x = 0\end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^{n+m-1}$ et pour tout $p \in [\![0, n+m-1]\!]$

$$h_1^{(p)}(0) = \frac{h^{(p+1)}(0)}{p+1}$$

Notons pour tout $p \in [\![0, m]\!]$ $A(p)$ l'assertion :

$$g_p \text{ est de classe } \mathcal{C}^{n+m-p} \text{ et } \forall k \in [\![0, n+m-p]\!],\quad g_p^{(k)}(0) = \frac{k!}{(p+k)!}f^{(k+p)}(0)$$

L'initialisation à $n = 0$ est vérifier par hypothèse sur f.
Soit $p \in [\![0, m-1]\!]$, supposons $A(p)$ vraie, alors l'application g_{p+1} qui vérifie d'après la question précédente

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad g_{p+1}(x) = \frac{1}{x}\big(g_p(x) - g_p(0)\big)$$

De plus, par définition,

$$g_{p+1}(0) = \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}$$

Or par hypothèse de récurrence :

$$g_p'(0) = \frac{1!}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0)$$

Ainsi d'après la propriété admise l'application g_{p+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+m-p-1}$ et pour tout $k \in [\![0, n+m-p-1]\!]$, on a

$$g_{p+1}^{(k)}(0) = \frac{g_p^{k+1}(0)}{k+1}$$

ainsi d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$g_{p+1}^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1} \times \frac{(k+1)!}{(p+k+1)!} f^{(k+1+p)}(0)$$

On a donc bien

$$g_{p+1}^{(k)}(0) = \frac{k!}{(p+k+1)!} f^{(k+1+p)}(0)$$

Problème II

Partie I. Préliminaire calculatoire.

Pour tout réel x et tout entier naturel k, on définit

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$$

avec $\binom{x}{0} = 1$.

1. **Donner la valeur de $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ pour $k=1$, $k=2$ et $k=3$.**
2. **Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$**

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$$

Corrigé :

1. On a, par définition :

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2!} \times \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3!} \times \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} = \frac{1}{16}$$

2. Montrons, par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$$

On a

$$\frac{2(-1)^{1-1}(2-2)!}{4 \times 1!(1-1)!} = \frac{1}{2} = \binom{\frac{1}{2}}{k}$$

Ainsi l'égalité est vraie au rang 1.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ supposons $A(k)$ vraie. Notons, tout d'abord que

$$\binom{\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{(\frac{1}{2}-k)}{k+1}\binom{\frac{1}{2}}{k}$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
\tbinom{\frac{1}{2}}{k+1} &= \frac{(\frac{1}{2}-k)}{k+1} \times \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!} \\
&= \frac{2k(1-2k)}{4k} \times \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k(k+1)!(k-1)!} \\
&= \frac{-2k(2k-1)2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^{k+1}(k+1)!k!} \\
&= \frac{2(-1)^k(2k)!}{4^{k+1}(k+1)!k!}
\end{aligned}$$

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$$

Partie II. Une étude de fonction.

On s'intéresse dans cette partie à la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

1. **Quel est le domaine de définition de la fonction f ?**
2. **Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.**
3. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer le DL à l'ordre n de l'application $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'aide des $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.**
4. **En déduire le DL à l'ordre $n+1$ en 0 de $x \mapsto \sqrt{1-4x}$, puis calculer le DL à l'ordre n de f en 0. On donnera explicitement le DL à l'ordre 4 de f en 0.**
5. **Déduire que le prolongé par continuité de f en 0 est dérivable en 0. Donner l'équation de sa tangente et la position du grape de f par rapport à la tangente.**

Corrigé :

1. L'expression $f(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$ et $1 - 4x \geq 0$. L'ensemble de définition de f est donc $I =]0, \frac{1}{4}]$.
2. Notons g l'application $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ définie sur$I$, elle est dérivable comme compostion d'applications dérivables et
$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}}$$
Or on remarque pour pour tout $x \in I$ on a
$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{g(0)-g(x)}{0-x}$$
Ainsi comme g est dérivable en 0, la fonction f admet une limite en 0 et
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-1}{2} g'(0) = 1$$
La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.
3. D'après le cours on a :
$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
4. Comme $4x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 on a :
$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4x)^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$$

Ainsi d'après la question 2. on a

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$$

D'où par somme et quotient :

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^{k-1} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

On obtient ainsi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

D'où le DL à l'ordre 4 :

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

5. La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0 ainsi le prolongé par continuité de f en 0 est dérivable et de dérivée $f'(0) = 1$. Le premier terme non nul du DL en 0 après le terme 1 est d'indice pair et est positif. Ainsi le graphe de f est audessus de la tangente en 0.

Partie III. Dénombrement des expressions bien parenthésées.

On s'intéresse dans cette partie à des suites de symboles constituées uniquement de parenthèses ouvrantes et fermantes qui sont bien parenthésées, c'est à dire qui vérifient les deux conditions suivantes :

- **il y a autant de (que de).**
- **chaque parenthèse ouvrante est refermée par une parenthèse fermante située après la parenthèse ouvrante. Autrement dit, lorsqu'on lit la suite de caractères de gauche à droite, on a en permanence croisé au moins autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.**
  Par convention on considèrera que l'ensemble vide est bien parenthésé.

Ainsi la suite (()()) est bien parenthésée alors que ())(() ne l'est pas.
Pour tout entier naturel n on note c_n le nombre de suites de parenthèses de longueur $2n$ qui sont bien parenthésées.

1. **Donner la valeur de c_0, c_1, c_2 et c_3 en faisant la liste des suites de parenthèses convenables (on devrait trouver $c_3 = 5$).**
2. **Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$$
3. **Montrer que la fonction f étudiée dans la partie II vérifie l'équation :**
$$\forall x \in D_f, \qquad f(x) = 1 + x(f(x))^2.$$
4. **En déduire que les coefficients de son DL d'ordre n en 0 sont les nombres c_k (on exploitera la relation précédente et l'unicité DL en 0 d'une fonction).**
5. **En déduire une expression explicite de c_n en fonction de n.**

Corrigé :

1. — D'après l'énoncé $c_0 = 1$.

   — Il n'y a qu'une seule façon de parenthéser correctement une suite de deux parenthèse : () ainsi $c_1 = 1$.
   — Les suites de 4 parenthèses bien parenthésés sont :

   (()); ()()

   Ainsi $c_2 = 2$.
   — Enfin les suites à 6 parenthèses bien parenthésées sont

   ()()(); ()(()), ((())), (()()), (())()

   Ainsi $c_3 = 5$.

2. Soit m une suite de parenthèse bien parenthésée.
   On note $2k$ le plus petit rang de la parenthèse fermante telle qu'il y ait autant de parenthèse ouvrante que de parenthèse fermante. C'est forcément un nombre pair puisqu'il y a eu autant de parenthèses ouvrantes que fermantes. Notons que k peut varier de 1 à n. Intéressons nous à la première partie du mot consituté des $2k$ parenthèses c'est un mot bien prenthésé. Il y en a c_{k-1}. En effet en fixant la première parenthèse et la dernière il reste un mot bien parenthésé de $2(k-1)$ parenthèses. Il y a donc c_{k-1} choix possibles.
   Enfin la fin du mot est un mot bien parenthésé de $2(n-k)$ parenthèses. Il y a c_{n-k} choix possibles. On a donc :
   $$c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$$
3. Soit $x \in D_f$ on a
   $$\begin{aligned} 1 + x(f(x))^2 &= 1 + x\frac{2 - 2\sqrt{1-4x} - 4x}{4x^2} \\ &= \frac{4x - 4x + 2(1 - \sqrt{1-4x})}{4x} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$
   On a donc bien
   $$\boxed{\forall x \in I, \quad 1 + x(f(x))^2 = f(x)}$$
4. Notons $\sum_{k=0}^{n} a_n x^x$ la partie régulière du DL à l'ordre n de $f(x)$ en 0.
   Calculons le DL à l'ordre n de $1 + x(f(x))^2$ en 0. On a :
   $$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} x^k$$
   D'où
   $$\begin{aligned} 1 + x\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 &= 1 + \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{2n+1}\sum_{j=1}^{k-1} a_j a_{k-1-j} x^k \end{aligned}$$
   Ainsi en tronquant à l'ordre n on obtient
   $$1 + x(f(x))^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} a_j a_{k-1-j} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
   Par unicité du DL la partie régulière du DL à l'ordre n de $f(x)$ en 0 et de $1 + (f(x))^2$ à l'ordre n en 0 sont égales ainsi on a
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + = 1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} a_j a_{k-1-j} x^k$$
   D'où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
   $$a_k = \sum_{j=0}^{k-1} a_j a_{k-1-j} \text{ et } a_0 = 1$$
   Les a_i et les c_i vérifient la même relation de récurrence. On peut montrer par récurrence forte qu'ils sont égaux.
5. D'après la relation démontrée dans la partie précédente on a donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
   $$\boxed{c_k = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!}}$$