Lycée Condorcet
PCSI

Mars 2025

1 Sous-espaces vectoriels

Dans cette feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels ?

$$E_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \geq b\right\}, \quad E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + 3c = b\right\}, \quad E_3 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a - b = 2\right\},$$

$$E_4 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a^2 + c^2 = b\right\}, \quad E_5 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a^2 + b^2 = c^2\right\}.$$

Même question avec les ensembles suivants, où $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$E_6 = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ f(0) = 3\right\}, \quad E_7 = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ f(3) = 0\right\},$$

$$E_8 = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ \exists M_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M_0\right\}, \quad E_9 = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M_1\right\} \text{ où } M_1 \in \mathbb{R} \text{ est fixé.}$$

Exercice 2.

1. Montrer que les deux ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$:

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}, \quad F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$

2. Considérons l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$? Si non, quel est le plus petit sous-espace vetoriel contenant E ?

Exercice 3. On note $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

$$\begin{array}{ll}
A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}, & B = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid u_0 = u_3 = 0\}, \\
C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique}\}, & D = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\}, \\
E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}, & F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge }\},
\end{array}$$

Exercice 4. On note $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{ll}
A = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ paire }\}, & B = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(2) = f(5) = 0\}, \\
C = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}, & D = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ est croissante }\},
\end{array}$$

2 Familles finies de vecteurs

Exercice 5. On travaille dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Préciser $\mathrm{Vect}(A)$ dans les cas suivants.

a) $A = \{(0,0)\}$ b) $A = \{(1,0)\}$ c) $A = \{(1,2),(3,4)\}$ d) $A = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

Exercice 6. On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni des lois usuelles. On pose

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + 2z - t = 0\right\}, \quad F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x + y + z + t = 0\right\},$$

1. Montrer que E et F des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Trouver une famille génératice de $E \cap F$.

Exercice 7. On travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{F} = (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais qu'elle n'est pas libre.
Trouver une sous-famille de $\mathcal{F}$ qui soit une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $\big(1, (X-a), (X-a)^2\big)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$, et donner, pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$, les composantes (coordonnées) de P dans cette base.
Donner les coordonnées du polynôme $X^2 + 3X - 1$.

Exercice 9. Reprendre les sous-espaces vectoriels de l'exercice 2 et en donner une base.

Exercice 10. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?
a) (u_1, u_2), où $u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,1,0)$ b) (u_1, u_2, u_3), où $u_1 = (0,0,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,1,1)$

c) (u_1, u_2, u_3), où $u_1 = (1,4,7), u_2 = (2,5,8), u_3 = (3,6,9)$

d) (u_1, u_2, u_3), où $u_1 = (1,1,1), u_2 = (a,b,c), u_3 = (a^2,b^2,c^2)$ $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3)$

Exercice 11. Soit $m \in \mathbb{C}$. Soient $u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (1,m,1,0), u_3 = (1,0,m,1), u_4 = (1,0,0,m)$. Pour quelles valeurs de m la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre dans $\mathbb{C}^4$?

Exercice 12. On peut décrire un sous-espace vectoriel d'au moins trois façons différentes :

· Par des équations cartésiennes comme ici : $A = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y - z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$.

· Par un paramétrage comme ici : $B = \left\{(a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

· Par la donnée d'une famille génératrice (qui peut-être une base ou non) comme ici :

$$C = \mathrm{Vect}\Big((1,2,-1,0), (0,1,3,-1)\Big).$$

Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 13. On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} 2a+b & 3b-5c & a \\ -b & a+b-c & a-2c \\ c & b+c & 2b-c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 14. Soient $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$, et $F = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$. Montrer que la famille (I, A, A^2) est une base de F.

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Supposons ici $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de F.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 16.
On travaille dans $\mathbb{R}^4$. On pose

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y - 2z - t = 0\},\ F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ z = 0 \text{ et } t = 0\},$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}.$$

Calculer $\dim(E)$, $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(E+F)$, $\dim(E+G)$, $\dim(F+G)$, et donner une base de chacun de ces espaces. La somme $E+F$ est-elle directe ? Même question pour $E+G$ et $F+G$.

Exercice 17.
Considérons l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit E et F les sous-espaces vectoriels définis par :

$$E = \mathrm{Vect}(X-1, X+2), \quad F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$$

Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = E + F$, la somme est-elle directe ?

Exercice 18.
Soient E, F, G trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E_0. On suppose que

$$F \subset G, \quad E \cap F = E \cap G, \quad \text{et} \quad E + F = E + G.$$

Montrer que $F = G$.

Exercice 19.

1. Montrer que l'ensemble des suites réelles constantes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et en donner deux supplémentaires différents.
2. Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 20.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (respectivement antisymétriques). On rappelle que les matrices symétriques (respectivement antisymétriques) sont les matrices $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M$ (respectivement ${}^tM = -M$).

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On raisonnera par analyse synthèse.
3. À titre d'exemple, donner la décomposition de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette somme directe.

Exercice 21.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(2) = 0\right\}$. On note e_0 le polynôme constant égal à 1, et $D = \mathrm{Vect}(e_0)$. Montrer que H et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner une base de H. Compéter cette base de H en une base de $\mathbb{R}_n[X]$ adaptée à la somme $H \oplus D$.

Exercice 22.
Soient a et b deux réels disctincts. On considère les ensembles E_a et E_b définis par :

$$E_a = \left\{P \in \mathbb{R}[X] | \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X-a)Q\right\} \quad \text{et} \quad E_b = \left\{P \in \mathbb{R}[X] | \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X-b)Q\right\}$$

1. Montrer que E_a et E_b sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c(X-a) + d(X-b) = 1$.
3. En déduire que $\mathbb{R}[X] = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?
4. Montrer que E_a et $\mathbb{R}_0[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 23.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$.