Lycée Condorcet
PCSI

Avril 2024

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous avons vu qu'un des points essentiel de la théorie des espaces vectoriels est la notion de base. Bien sûr une des premières question à se poser est de savoir si une base existe toujours, puis si elles ont toujours même cardinal. Cela nous permettra de définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

1 Existence de bases, base extraite, base incomplète

Définition 1.

On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.

Exemple 1

1. $\{0\}$ est de dimension finie (engendré par la famille vide).
2. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. .

1.1 Théorème de la base extraite

Rappelons tout d'abord cette proposition démontrée dans le chapitre précédent :

Proposition 2 (Principe de réduction d'une famille génératrice)**.**

Soit $(u_1, \dots, u_{p+1})$ une famille génératrice de E. Si $u_{p+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots u_p)$, alors la sous-famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice.

Cette proposition donne le moyen d'extraire une base de toute famille génératrice. C'est le théorème de la base extraite.

Théorème 3.

De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel, on peut extraire une base.

Exemple 2

1. Considérons $\mathbb{R}^3$ et la famille génératice $\big((1,2,0),(0,2,3),(0,0,1),(1,1,1),(4,1,1)\big)$, en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Au delà de l'intérêt pratique de ce théorème, il nous permet de répondre à une des question fondamentale de ce chapitre. L'existence de base d'un espace vectoriel de dimension finie.

Corollaire 4.

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

1.2 Théorème de la base incomplète

Proposition 5 (Principe d'extension d'une famille libre).

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre de E et v un vecteur de E. Si $v \notin \operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ alors la famille $(u_1,\dots,u_p,v)$ est libre.

Comme tout à l'heure, ce principe va nous permettre de donner un algorithme permettant de compléter une famille libre en une base.

Théorème 6 (de la base incomplète).

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre et $\mathscr{G}=(v_1,\dots,v_m)$ une famille génératrice de E. Alors on peut choisir certains vecteurs $v_{i_1},\dots,v_{i_r}$ de $\mathscr{G}$ de sorte que la famille $(u_1,\dots,u_p,v_{i_1},\dots,v_{i_r})$ soit une base de E.

Exemple 3

1. La famille $\big((3,2,-4),(2,1,-2)\big)$ est libre. Compléter la en une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $\big((X-1)^2,(X-2)^2,(X-3)^2\big)$ est libre, la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cardinal des bases des espaces vecoriels de dimension finie.

Théorème 7 (Lemme d'échange (Grassman)).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(b_1,\dots,b_p)$ une famille génératrice de E et a un vecteur de E.
On suppose que a s'écrit $a_1=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\cdots+\lambda_p b_p$ avec, pour un certain $i\in[\![1,n]\!]$ $\lambda_i\neq 0$.
Alors $(b_1,\dots,b_{i-1},a,b_{i+1},\dots,b_p)$ est génératrice.

Corollaire 8.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $(b_1,\dots,b_p)$ une famille génératrice de E. Si $(a_1,\dots,a_p)$ est une famille libre de E, alors c'est une base.

Corollaire 9.

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Proposition 10.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non nul. Dans une famille libre de E, il y a toujours moins de vecteurs que dans une famille génératrice de E.
Ainsi si $\mathcal{L}$ est une famille libre, $\mathcal{B}$ une base et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E (toutes trois finies), alors, les cardinaux de ces familles vérifient :

$$|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{G}|$$

Théorème 11.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal.

Ce dernier résultat est fondamental dans ce chapitre car il légitime la définition suivante :

Définition 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **dimension** de E le cardinal d'une base quelconque de E, et on le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou simplement $\dim(E)$.
Si E n'est pas de dimension finie, on pose $\dim(E) = +\infty$.

Voici la dimension des espaces vectoriels classiques du programme :

Exemple 4

1. L'espace nul, $\{0\}$, est le seul espace de dimension 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension n comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Mais attention $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$.
4. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np.
5. Dans $\mathbb{C}^3$, posons

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ x - z = 0\right\}, \qquad E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ x - 3y - 3z = 0\right\}$$

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ \left\{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{array}\right. \right\}, \qquad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ \left\{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right. \right\}.$$

   Notons $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (3,-2,3)$, $x_3 = (0,-1,1)$. Montrer que
   - la famille (x_1, x_2) est une base de E_1,
   - la famille (x_2, x_3) est une base de E_2,
   - la famille (x_2) est une base de F,
   - l'espace G est réduit au vecteur nul : $G = \{0\}$.

   Il en résulte que

$$\dim E_1 = 2, \quad \dim E_2 = 2, \quad \dim F = 1, \quad \dim G = 0.$$

6. On travaille dans $\mathbb{C}_3[X]$. On note $H = \left\{P \in \mathbb{C}_3[X],\ P(0) = 0\right\}$. Trouver une base de H, et montrer que $\dim H = 3$.
7. Soit $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c \neq 0$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = bu_{n+1} + cu_n\right\}.$$

   Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Proposition 13.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que E est de dimension n.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

1. On suppose que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre. Alors $p \leq n$, et on a l'équivalence
$$p = n \iff (x_1, \ldots, x_p) \text{ est une base de } E.$$
2. On suppose que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille génératrice de E. Alors $p \geq n$, et on a l'équivalence
$$p = n \iff (x_1, \ldots, x_p) \text{ est une base de } E.$$

Exemple 5

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons
$$u_1 = (2, 1, -1), \quad u_2 = (1, 3, 2), \quad u_3 = (1, 1, 0), \quad u_4 = (0, 0, 1), \quad u_5 = (2, 3, 1).$$
On considère l'espace $P = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Montrer que $\dim(P) = 2$.
Vérifier que $u_3 \in P$, $u_4 \in P$, $u_5 \in P$. Montrer que (u_3, u_4, u_5) n'est pas une base de P, que (u_3, u_4) est une base de P, et que (u_3) n'est pas une base de P.

La contraposée de la première assertion est souvent utilisée pour démontrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie.

Corollaire 14.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille libre de cardinal n, l'espace E est de dimension infinie.

Exemple 6

1. On travaille dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace des suites réelles. Pour $m \in \mathbb{N}$, notons ${}^m e = ({}^m e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ {}^m e_n = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } n = m \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$.
Montrer que pour tout $m_0 \in \mathbb{N}$, la famille $\left({}^0 e, {}^1 e, \ldots, {}^{m_0} e\right)$ est libre. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie (on dit qu'il est de dimension infinie).
2. L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 15 (Théorème de la base incomplète en dimension finie)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que E est de dimension n.

1. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x_1, \ldots, x_p)$ soit une famille libre d'éléments de E.
Alors il existe $x_{p+1}, \ldots, x_n \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ tels que $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ soit une base de E.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x_1, \ldots, x_p)$ soit une famille libre d'éléments de E.
Alors il existe $x_{p+1}, \ldots, x_n \in E$ tels que $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ soit une base de E.

3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 16.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
De plus, on a l'équivalence : $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

- **Vocabulaire.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que E soit de dimension n.

  — Soit $a \in E \setminus \{0\}$. Posons $D = \text{Vect}(a)$. Alors D est un sous-espace vectoriel de E, et $\dim(D) = 1$. On dit que D est une **droite** (vectorielle).

  — Supposons que a et b soient deux vecteurs de E non colinéaires (i.e. la famille (a, b) est libre ; cela entraîne $n \geq 2$). Posons $P = \text{Vect}(a, b)$. Alors P est un sous-espace vectoriel de E, et $\dim(P) = 2$. On dit que P est un **plan** (vectoriel).

  — Si H un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim(H) = n - 1$, on dit que H est un **hyperplan** de E.

Définition 17.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $(v_1, \ldots, v_p)$:

$$\text{rg}(v_1, \ldots, v_p) = \dim \text{Vect}(v_1, \ldots, v_p).$$

- **Remarques**

1. Puisque $\text{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, on a
$$\text{rg}(v_1, \ldots, v_p) \leq \dim E.$$
2. Puisque la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ a p vecteurs, on a
$$\text{rg}(v_1, \ldots, v_p) \leq p.$$
3. Si la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre, elle est alors libre et génératrice de $\text{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$, c'en est donc une base, et dans ce cas $\text{rg}(v_1, \ldots, v_p) = p$.

Intéressons nous maintenant aux méthodes pour calculer le rang d'une famille de vecteur.
Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille d'un espace vectoriel E.

- **Première méthode**

Méthode.

Dans cette première methode on extrait de la famille $\mathcal{F}$ une base du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathcal{F})$. On applique donc l'algorithme décrit dans la démonstration du théorème de la base extraite.

On raisonne par équivalences pour résoudre le système linéaire $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_{\mathbb{R}^4}$ d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. S'il est possible d'exprimer un ou plusieurs vecteurs de la famille comme combinaison linéaire des autres, on le verra grâce à ce système. On pourra ainsi trouver une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Le rang de $\mathcal{F}$ est le cardinal de cette base.

- **Deuxième méthode**

Pour la deuxième méthode, l'idée est de remplacer la famille $\mathcal{F}$ par une famille dont il est simple de voir le rang et qui engendre le même sous-espace vectoriel. Pour cela nous avons besoin du résultat suivant :

Proposition 18.

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de E, alors pour toute famile $\mathscr{G}$ obtenue à partir de $\mathcal{F}$ par les opérations élémentaires suivantes :

1. Échanger deux vecteurs de la famille.
2. Ajouter à un vecteur u_i de $\mathcal{F}$ un multiple d'un autre vecteur u_j de $\mathcal{F}$.
3. Multiplier un vecteur u_i de $\mathcal{F}$ par une constante non nulle.
4. Enlever le vecteur nul.

on a :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{G}), \quad \text{et donc} \quad \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\mathscr{G})$$

Méthode.

On transforme successivement, à l'aide des opérations élémentaires, la famille $\mathcal{F}$ en une famille $\mathcal{F}'$ qui vérifie $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}')$ et dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E forment une matrice triangulaire supérieure (on dit que la famille est échelonnée pour la base $\mathcal{B}$). Il est alors très simple de voir le rang de cette famille.

Exemple 7

Dans $\mathbb{R}^4$, posons

$$u_1 = (1, 2, -1, 3), \quad u_2 = (1, 1, 1, 1), \quad u_3 = (1, 4, -5, 7).$$

Trouver $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3)$. Pour calculer ce rang, avec les deux méthodes.

4 Complément sur les polynômes

Dans cette partie, on rappelle une série de résultats connus sur les polynômes, en utilisant le vocabulaire des espaces vectoriels.

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n :

$$\mathbb{K}_n[X] \;=\; \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\} \;=\; \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \;\middle|\; (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \right\}.$$

On a vu que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.

Proposition 19.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Par conséquent, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

Proposition 20.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{K}$.
La famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- **Remarque.** Cela signifie que si P est un polynôme tel que $\deg P \leq n$, alors il existe un unique $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} b_k (X-a)^k$. la formule de Taylors pour les polynômes peut alors être inerprétée comme suit :

Proposition 21 (Formule de Taylor pour les polynômes)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$\left(\frac{P^{(0)}(a)}{0!}, \frac{P^{(1)}(a)}{1!}, \dots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \right)$$

sont les coordonnées de P dans la base $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

- **Exemple.** Soit $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$. Trouver les coordonnées de P dans la base $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

5 Somme de sous-espaces vectoriel de dimension finie.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que E est de dimension finie.

5.1 Somme et somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 22.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que <u>E_1 et E_2 sont en somme directe</u>. Alors

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Proposition 23 (Formule de Grassman)**.**

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

<u>Exemple 8</u>

1. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $u_1 = (5, -6, 1)$, $u_2 = \left(\sqrt{2}, (\pi - 1)\sqrt{2}, -\pi\sqrt{2}\right)$, et

$$D_1 = \text{Vect}(u_1), \quad D_2 = \text{Vect}(u_2), \quad P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}.$$

Calculer $\dim(D_1 + D_2)$. Vérifier que D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels de P, et montrer que

$$D_1 + D_2 = P.$$

2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, posons $A_1 = X - 2$, $A_2 = X(X-2)$, $B = X^2(X-3)$, et

$$P_1 = \text{Vect}(A_1, A_2), \quad P_2 = \text{Vect}(B).$$

Déterminer $\dim(P_1 + P_2)$, et donner une base de $P_1 + P_2$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, posons

$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+3z=0\} \quad \text{et} \quad P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-5y+z=0\}.$$

Montrer que $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$.

5.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 24.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que F et G soient supplémentaires dans E.

- **Remarque**. Dès que $E \neq \{0_E\}$ et que $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$, alors F admet une infinité de supplémentaires.

Exemple 9

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $D = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$. Proposer plusieurs supplémentaires de D.

Proposition 25.

Notons $n = \dim E$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = n$.
4. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = n$.

Exemple 10

Dans $\mathbb{R}^3$, posons $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y-z=0\}$ et $D = \mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big)$. Montrer que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Proposer d'autres supplémentaires de P dans $\mathbb{R}^3$. Proposer d'autres supplémentaires de D dans $\mathbb{R}^3$.

Méthode.

Dans le cas de la dimension finie, pour montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires, on utilise très souvent la proposition précédentes.