Lycée Condorcet
PCSI

Avril 2024

Combinatoire

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble

1.1 Définition

Définition 1.

Un ensemble est **fini** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection vers $[\![1, n]\!]$. Cet entier n est unique et s'appelle le **cardinal** de E et est noté $\text{Card } E$.

• **Remarque**
Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments qui le compose.

Exemple 1

L'ensemble $\{2, 7, \sqrt{2}, \pi, \sqrt{2}\}$ est en bijection avec lensemble $[\![1, 4]\!]$, son cardinal est 4.

Proposition 2.

Soit E un ensemble fini de cardinal n, alors
- Toute partie A de E est un ensemble fini et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$.
- $\text{Card } E = \text{Card } A$ si et seulement si $E = A$.

1.2 Cardinal et union

Définition 3.

Soient A et B deux ensembles finis on dit que A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 4.

Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. Alors la réunion $A \cup B$ est finie et :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$$

Démonstration : Soient A et B deux ensembles finis de cardinal respectif n et p. Par définition il existe deux bijections $\varphi_A :\to [\![1,n]\!]$ et $\varphi_B : B \to [\![1,p]\!]$. Considérons alors l'application $\varphi_{A\cup B}$ définie par :

$$\varphi_{A\cup B} : \left\{ \begin{array}{ccc} A \cup B & \longrightarrow & [\![1, n+p]\!] \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_A(x) & \text{si } x \in A \\ \varphi_B(x) + n & \text{si } x \in B \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Cette application est bien définie car $A \cap B = \emptyset$.
L'application suivante est sa réciproque :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, n+p]\!] & \longrightarrow & A \cup B \\ r & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_A^{-1}(r) & \text{si } r \in [\![1,n]\!] \\ \varphi_B^{-1}(r-n) & \text{si } r \in [\![n+1, n+p]\!] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

C'est donc bien une bijection.
On a donc bien

$$\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)}$$

■

Proposition 5.

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ est fini et :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card } A_k$$

Démonstration : On procède par récurrence sur le nombre d'ensembles considérés.
Initialisation est la proposition précédente.
On démontre l'hérédité en remarquant que si $A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}$ sont deux à deux disjoins alors A_{n+1} et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ sont disjoints.
On peut alors appliquer la proposition précédente et l'hypothèse de récurrence. ■

Proposition 6.

Soit A une partie finie de E fini. Alors

$$\text{Card } \overline{A} = \text{Card } E - \text{Card } A$$

Démonstration : Soit A une partie de E un ensemble fini. Par définition les ensembles A et $\overline{A}$ sont disjoints et $A \cup \overline{A} = E$. On a donc

$$\text{Card } E = \text{Card } (\overline{A} \cup A) = \text{Card } \overline{A} + \text{Card } A$$

On a donc bien :

$$\boxed{\text{Card } \overline{A} = \text{Card } E - \text{Card } A}$$

■

Proposition 7.

Soit E un ensemble fini et soient A et B deux parties de E. Alors :

$$\text{Card } A \backslash B = \text{Card} A - \text{Card } A \cap B$$

Démonstration : Soit E un ensemble fini et soient A et B deux parties de E.
Rappelons que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$, on a donc

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$$

et les termes de cette réunion sont disjoints. On a ainsi

$$\text{Card } A = \text{Card}(A \backslash B) + \text{Card } (A \cap B)$$

On a donc bien

$$\boxed{\text{Card } A \backslash B = \text{Card} A - \text{Card } A \cap B}$$

■

Théorème 8 (Formule de Poincaré).

Si A et B sont finis, alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)$$

Démonstration : Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a les égalités :

$$A \cup B = (A \cup B) \cap E = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cup B$$

La dernière égalité est obtenue par distributivité de la réunion sur l'intersestion.
De plus $A \backslash B$ et B sont disjoints. On obtient donc :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \backslash B) + \text{Card } B$$

En appliquant la proposition précédente on a alors :

$$\boxed{\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)}$$

■

1.3 Produit cartésien

Proposition 9.

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B$$

Démonstration : Cette proposition découle directement du lemme suivant :

Lemme 10.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. L'ensemble $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ est de cardinal $n \times p$.

Démonstration : Nous allons définir une bijection de l'ensemble $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ dans l'ensemble $[\![1, n \times p]\!]$. Considérons l'application ϕ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] & \longrightarrow & [\![1, n \times p]\!] \\ & (i, j) & \longmapsto & j + (i-1)p \end{array}$$

Son application réciproque est donnée par

$$\begin{array}{rccc} \phi^{-1} : & [\![1, n \times p]\!] & \longrightarrow & [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \\ & k & \longmapsto & (q+1, r+1) \end{array}$$

Où q et r sont respectivements le quotient et le reste de la division euclidienne de $k-1$ par p. ■

Démontrons maintenant la proposition. Soient A et B deux ensembles finis de cardinal respectifs n et p.
Par définition il existe deux bijections $\varphi_A : A \to [\![1,n]\!]$ et $\varphi_B : B \to [\![1,p]\!]$. Alors l'application $\varphi_A \times \varphi_B$ définie par :

$$\varphi_A \times \varphi_B : \begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \\ (x,y) & \longmapsto & (\varphi_A(x), \varphi_B(y)) \end{array}$$

admet comme application réciproque :

$$\varphi_A^{-1} \times \varphi_B^{-1} : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & A \times B \\ (k,l) & \longmapsto & (\varphi_A^{-1}(k), \varphi_B^{-1}(l)) \end{array}$$

C'est donc un isomorphisme. Les deux ensembles ont donc même cardinal d'où d'après le lemme :

$$\boxed{\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B}$$

■

Proposition 11.

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis alors l'ensemble $A_1 \times \cdots \times A_n$ est fini et

$$\text{Card } (A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \text{Card } A_k$$

Démonstration : On procède par récurrence sur le nombre d'ensemble.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note P_n l'assertion :

$$\text{Si } A_1, \cdots A_n \text{ sont } n \text{ ensembles finis alors Card } (A_1 \times A_2 \times \cdots A_n) = \prod_{k=1}^{n} \text{Card } A_k$$

L'initialisation est évidente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
Nous allons proposer deux types de rédaction de cette démonstration la première plus formelle et rigoureuse la deuxième qui reste acceptable et qui correpond aux types de raisonnements que nous utiliserons dans les exercices.
Soient $A_1, \cdots A_n, A_{n+1}$ $n+1$ ensembles finis.
Pour tout $x \in A_{n+1}$ on note F_x l'ensemble :

$$F_x = \{(a_1, \cdots a_n, x), (a_1, \cdots a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n\}$$

On a alors pour tout $x \in A_{n+1}$

$$\text{Card } F_x = \text{Card } (A_1 \times \cdots \times A_n)$$

et

$$A_1 \times \cdots \times A_{n+1} = \bigcup_{x \in A_{n+1}} F_x$$

de plus si $x \neq y$ alors $F_x \cap F_y = \emptyset$. On a donc :

$$\text{Card } (A_1 \times \cdots \times A_{n+1}) = \sum_{x \in A_{n+1}} \text{Card } F_x = \sum_{x \in A_{n+1}} \text{Card } (A_1 \times \cdots \times A_n) = \text{Card } (A_{n+1}) \times \text{Card } (A_1 \times \cdots \times A_n)$$

Ainsi par hypothèse de récurrence on a :

$$\boxed{\text{Card } (A_1 \times \cdots \times A_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} \text{Card } A_k}$$

Le principe de récurrence permet donc de conclure.

On peut retrouver ce résultat en explicitant la **construction** d'un p-uplet. Travaillons avec $A_1, \cdots, A_p$ des ensembles finis de cardinaux respectifs $n_1, \cdots, n_p$. Pour se donner un élément $(a_1, \cdots, a_p)$ de $A_1 \times \cdots \times A_p$ il faut :

1. Choisir a_1, il y a n_1 choix.
2. Pour chaque valeur de a_1, on a n_2 choix de (a_1, a_2). Il y a $n_1 \times n_2$ choix pour (a_1, a_2).
3. En itérant pour $k \in [\![2,p]\!]$, pour chaque $k-1$-uplet $(a_1, \cdots, a_{k-1})$ on a n_k choix pour a_k et donc $n_1 \times \cdots \times n_k$ choix pour $(a_1, \cdots, a_k)$.

Ainsi il y a $n_1 \times \cdots \times n_p$ constructions possibles. Justifier vraiment l'écriture d'un produit réclame de faire un arbre, de compter les branches... Tout cela est fastidieux et on tâchera, dans une situation de dénombrement, de modéliser les choses à l'aide d'un produit cartésien. ■

1.4 Cardinal et applications

Proposition 12.

Soient E et F deux ensembles finis et soit $f : E \to F$ une application. Alors :

1. Si f est injective, alors Card $E \leq$ Card F.
2. Si f est surjective, alors Card $E \geq$ Card F.
3. Si f est bijective, alors Card $E =$ Card F.

Démonstration : 1. Notons $E = \{x_1, \cdots, x_p\}$ où $p =$ Card E (puisqu'il y a p éléments dans E les x_i sont deux à deux distincts). Comme f est injective, les éléments $f(x_1), \cdots f(x_p)$ sont distincts deux à deux, ce qui fait que F contient au moins p éléments. On a bien $\boxed{\text{Card } F \geq \text{Card } E}$.

2. Notons $F = \{y_1, \cdots, y_n\}$ où $n =$ Card F. Si f est surjective tout élément de de F admet au moins un antécédent par f. Notons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, x_k un antécédent de y_k. Comme, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $f(x_k)$ sont distincts deux à deux alors les x_k sont distincts deux à deux. Ainsi E contient au moins $n =$ Card F éléments distincts et donc $\boxed{\text{Card } F \leq \text{Card } E}$.

3. Si maintenant f est une bijection on a Card $E \leq$ Card F car f est injective et Card $E \geq$ Card F car f est surjective. D'où $\boxed{\text{Card } E = \text{Card } F}$. ∎

Méthode.

On utilisera souvent la contraposée de ces implications.
Par exemple une application d'un ensemble fini dans un autre dont le cardinal est strictement inférieur au premier, ne peut pas être injective : il existe donc nécessairement deux éléments qui ont même image. C'est ce qu'on appelle familièrement le **principe des tiroirs** :

Si on range p chaussettes dans n tiroirs et que $n < p$, il existe

au moins deux chaussettes dans le même tiroir.

Proposition 13.

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n. On considère une application $f : E \to F$. Alors :

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective } \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

Démonstration : Si f est bijective alors elle est bien sûr injective et surjective.
Montrons que si f est injective alors, sous ces hypothèses, elle est surjective. Et si elle est surjective alors elle est injective.

• Supposons que f est injective.
Pour montrer la surjectivité de f il suffit de montrer que $\operatorname{Im} f = F$. Or comme se sont des ensembles finis et que $\operatorname{Im} f \subset F$, il suffit de montrer que Card $\operatorname{Im} f =$ Card F. Considérons l'application $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \operatorname{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Comme f est injective $\tilde{f}$ est injective. Ainsi d'après la proposition précédente, Card $E \leq$ Card $\operatorname{Im}(f)$ mais Card $E =$ Card F d'où Card $F \leq$ Card $\operatorname{Im}(f)$. Or, comme $\operatorname{Im}(f)$ est une partie de F on a Card $\operatorname{Im}(f) \leq$ Card F. On en déduit Card $F =$ Card $\operatorname{Im}(f)$. Ce qui implique le résultat cherché.

• Supposons maintenant que f est surjective.
Pour montrer que f est injective nous allons montrer que, pour tout y de F l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est de cardinal 1. Comme f est sujective, on sait déjà que $f^{-1}(y)$ est non vide et donc de cardinal supérieur ou égal à 1.
Comme ci-dessus on écrit $F = \{y_1, \cdots, y_n\}$ où $n =$ Card $F =$ Card E. On a donc

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} \{y_k\}.$$

Mais d'une part on a $f^{-1}(F) = E$ et d'autre part l'image réciproque de l'union est l'union des images réciproques, d'où

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(\{y_k\})$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints puisque un élément de E ne peut être antécent de deux éléments de F. Et comme Card $E =$ Card F on a :

$$n = \sum_{k=1^n} \text{Card}(f^{-1}(\{y_k\})$$

mais comme, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Card $f^{-1}(\{y_k\}) \geq 1$ alors on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Card$f^{-1}(\{y_k\}) = 1$. En effet s'il existe $j \in [\![1, n]\!]$, tel que Card$f^{-1}(\{y_j\}) > 1$ alors on aurait Card$f^{-1}(\{y_j\}) \geq 2$ et $\sum_{k=1^n} \text{Card}(f^{-1}(\{y_k\}) \geq n + 1$ ce qui contredit cette égalité.
Ainsi tout élément y de F admet bien un unique antécédent par f. L'application f est donc bien injective. ■

Proposition 14.

Soient E et F deux ensembles finis. L'ensemble F des applications de E dans F est fini et son cardinal est :

$$\text{Card }(F^E) = (\text{Card } F)^{(\text{Card } E)}$$

Démonstration : Enumérons les éléments de E : $E = \{x_1, \cdots, x_p\}$ où $p =$ Card E. Se donner une application de E dans F revient à se donner pour chaque élément de E une image dans F. On a donc Card F choix pour l'image de x_1, autant pour celle de x_2, etc... Ainsi, on a $(\text{Card } F)^p$ choix au total. ■

2 p-listes

2.1 Définition

Définition 15.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini tel que $\text{Card}(E) = n$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
On appelle p-liste d'éléments de E tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

- **Exemples.**

- Si E est un ensemble à n éléments, et si $p \in \mathbb{N}$, choisir une p-liste d'éléments de E peut s'effectuer en p étapes :
  — $1^{\text{ère}}$ étape : on choisit le premier élément de la p-liste. Il y a n possibilités.
  — $2^{\text{ème}}$ étape : on doit choisir le deuxième élément de la p-liste. Il y a n possibilités.
  — ...
  — $p^{\text{ème}}$ étape : on doit choisir le $p^{\text{ème}}$ élément de la p-liste. Il y a n possibilités.

Au total, il y a n^p façons de choisir une p-liste. C'est ce que résume la proposition suivante. Les p étapes que l'on vient de mentionner peuvent se représenter grâce à un arbre qui d'un point initial, ferait partir n branches (c'est la première étape), puis, de chaque résultat ainsi obtenu, ferait partir n nouvelles branches (c'est la deuxième étape), et ainsi de suite. Au bout de p étapes, on obtient n^p feuilles.

Proposition 16.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini tel que $\text{Card}(E) = n$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.

Exemple 2

1. Une urne contient 12 boules, numérotées de 1 à 12. On réalise cinq fois l'opération suivante : on tire au hasard une boule, on note son numéro, et on remet la boule dans l'urne. On dit qu'on a effectué cinq tirages successifs avec remise. À la fin, on regarde quels sont les numéros obtenus, en prenant en compte l'ordre dans lequel les boules sont apparues.
   Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Une classe de trente étudiants reçoit les résultats d'un devoir : chacun a une note entre 0 et 10 (on suppose que la note est un nombre entier). On dresse un tableau qui indique quelle note chaque élève a eue. Combien y a-t-il de tableaux possibles ?

2.2 p-listes d'éléments distincts ou p-arrangements

Définition 17.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}(E) = n$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
On appelle p-liste d'éléments distincts de E tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que $x_1, \ldots, x_p$ soient des éléments (de E) deux à deux distincts.
On appelle une telle liste, un **p-arrangement**.
L'ensemble des p-arrangements de E pourra être noté $\mathcal{A}_p(E)$

• **Remarque.** Si $p > n$, il n'y a pas de p-liste d'un ensemble à n éléments, car il est impossible dans ce cas de trouver p éléments distincts.

• Si E est un ensemble à n éléments, et si $p \in [\![0, n]\!]$, choisir une p-liste d'éléments distincts de E peut s'effectuer en p étapes :

— $1^{\text{ère}}$ étape : on choisit le premier élément de la p-liste. Il y a n possibilités.
— $2^{\text{ème}}$ étape : on doit choisir le deuxième élément de la p-liste. Comme cet élément doit être distinct du premier, il y a $n-1$ possibilités.
— ...
— $p^{\text{ème}}$ étape : on doit choisir le $p^{\text{ème}}$ élément de la p-liste. Comme cet élément doit être distinct des $p-1$ éléments qu'on a déjà sélectionnés, il reste $n-(p-1)$ possibilités.

Au total, il y a $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)$ façons de choisir une p-liste. C'est ce que résume la proposition suivante.

Proposition 18.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}(E) = n$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
Le nombre de p-arrangements de E est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple 3

1. Une urne contient 12 boules, numérotées de 1 à 12. On effectue cinq fois l'opération suivante : on tire une boule au hasard, on note son numéro, et on ne la replace pas dans l'urne. On dit qu'on a effectué cinq tirages sans remise. À la fin, on regarde les numéros obtenus, en prenant en compte l'ordre d'apparition des numéros.
   Combien y a-t-il de résultats possibles ?
   Combien y aurait-t-il de résultats possibles si l'on ne prenait pas en compte l'ordre d'arrivée ?
2. On observe une course de dix chevaux. On s'intéresse aux trois chevaux qui arrivent en premier, et à leur ordre d'arrivée. Combien y a-t-il de possibilités ?

Proposition 19.

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. On suppose $p \leq n$.
Le nombre d'applications injectives allant de E dans F est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration : Notons $x_1, \cdots, x_p$ les éléments de E. Se donner une application de E dans F revient alors à se donner un p-uplet d'éléments de F. Le i-ème élément étant l'image de x_i. L'application est alors injective si et seulement si toutes les images sont distinctes deux à deux. C'est à dire si le p-uplet est un p-arrangement.
D'après le résultat précédent il y a bien $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F. ∎

2.3 Permutations

Définition 20.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}(E) = n$.
On appelle **permutation** de E tout n-arrangements de E.

• Puisqu'une permutation de E est un cas particulier de p-liste, avec $p = \mathrm{Card}(E)$, on déduit de la proposition 25 la proposition suivante.

Proposition 21.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini tel que $\mathrm{Card}(E) = n$.
Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple 4

1. Une urne contient 12 boules, numérotées de 1 à 12. On effectue douze tirages sans remise. À la fin, on observe dans quel ordre les boules ont été tirées. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. On observe une course de dix chevaux, et on s'intéresse à leur ordre d'arrivée. Combien y a-t-il de possibilités ?
3. Chaque année, les étudiants de PCSI sont parrainés par les étudiants de deuxième année (chaque élève de PCSI a un parrain en sup). Une année, il y a autant d'élèves de PCSI que de deuxième année. De combien de façons est-il possible de distribuer les parrainages ?

Définition 22.

Soit E un ensemble fini. On appelle **permutation** de E, toute application bijective de E dans lui-même.

Proposition 23.

Il existe $n!$ bijections entre deux ensembles de même cardinal n.
En particulier, si E est un ensemble fini de cardinal n, il existe $n!$ permutations de E.

3 Ensembles des parties d'un ensemble et p-combinaisons.

3.1 Ensembles des parties

Proposition 24.

Soit E un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}$$

Démonstration : Soit E un ensemble fini de cardinal n et A un sous-ensemble de E. On rappelle la définition de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$:

$$\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut se présuader que l'application ψ suivante est une bijection de l'ensemble des parties de E dans l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$.

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

L'application réciproque étant l'application suivante :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccl} \{0,1\}^E & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ \phi & \longmapsto & \phi^{-1}(\{1\}) \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\text{Card}\mathcal{P}(E) = \text{Card}(\{0,1\}^E)$$

On a donc bien d'après la proposition 14

$$\boxed{\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}}$$

■

Exemple 5

Il y avait 2^{44} (plus de 17 000 milliards !) façons de répartir la classe en deux groupes PC/PSI.

3.2 Ensembles des parties à p éléments, ou p-combinaisons

Définition 25.

Soit E un ensemble. On appelle p-**combinaison** toute partie de E ayant p éléments.
L'ensemble des p-combinaisons de E pourra être noté $\mathcal{P}_p(E)$.

Exemple 6

Les ensembles $\{1,2,3\}$ et $\{2,3,4\}$ sont des 3-combinaisons de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\{1,1,2\}$ est une 2-combinaison de $\mathbb{N}$.

Rappel On a défini le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme le quotient $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. On a notamment démontré qu'il s'agissait d'un entier. Nous allons enfin comprendre pourquoi il se lit "k parmi n".

Proposition 26.

Soient E un ensemble fini de cardinal n, et p un entier naturel.
Le nombre de parties à p éléments de E (p-combinaisons d'éléments de E) est $\dbinom{n}{p}$.

$$\text{Card } \mathcal{P}_p(E) = \binom{n}{p}$$

Démonstration : • Démonstration informelle
Si on se donne une p-combinaison de E, alors il y a $p!$ façons d'ordonner les éléments de cette partie pour obtenir un p-arrangement. Il y a donc $p!$ fois plus de p-arrangements d'éléments de E que de p-combinaisons du même ensemble et donc

$$\text{Card } \mathcal{P}_p(E) = \frac{1}{p!}\text{Card } \mathcal{A}_p(E) = \frac{1}{p!}\frac{n!}{(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

• Si on écrit plus formellement cette démonstration.
Se donner un p-arrangement de E, c'est se donner une partie A à p éléments de E (une p-combinaison) puis faire un p-arrangement avec les éléments de A. On a donc :

$$\mathcal{A}_p(E) = \bigcup_{A\in\mathcal{P}_p(E)} \mathcal{A}_p(A)$$

Cette réunion est disjointe. En passant aux cardinaux on obtient :

$$\text{Card } \mathcal{A}_p(E) = \sum_{A\in\mathcal{P}_p(E)} \text{Card } \mathcal{A}_p(A)$$

Or, pour A fixée avec p éléments, le cardinal de $\mathcal{A}_p(A)$ vaut $p!$ (c'est une permutation !) et ne dépend donc pas de A on a ainsi :

$$\text{Card } \mathcal{A}_p(E) = p! \sum_{A\in\mathcal{P}_p(E)} 1 = p!\text{Card } \mathcal{P}_p(E).$$

On retrouve bien la formule annoncée. ■

Exemple 7

1. Une urne contient dix boules numérotées, dont quatre sont rouges et six sont vertes. On effectue un <u>tirage simultané</u> de trois boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Combien y a-t-il de tirages ne contenant que des boules vertes ?
2. Dans un jeu, on pioche cinq cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de combinaisons possibles de cinq cartes ? Combien y a-t-il de façons d'obtenir cinq trêfles ?
3. Combien de trinômes de colle différents pouvait-on former en septembre dans la classe ? et pour le nouveau colloscope, après le choix d'option ?

Méthode.

Face à un problème de dénombrement il y a deux stratégies types.

- La première consiste à **modéliser** les objets que l'on veut compter. Pour cela nous avons trois types d'objets, p-combinaisons, p-listes, p-arrangements. Répondre aux deux questions suivantes permet de choisir entre ces trois types d'objets.
  — L'ordre a t'il une importance ? Si non c'est une p-combinaison, si oui passer à la deuxième question.
  — Y-a t'il répétition possible ? (dans le cas d'un tirage : y a t'il remise ?) si oui ce sont des p-listes si non des p-arrangements.
- La modélisation directe est parfois impossible. Cas typique : lorsqu'on doit faire une liste d'objets *dépendants les uns des autres*. On explicite alors une procédure de construction progressive des objets à compter.

Exemple 8

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Combien existe-t'il de couples (A, x) avec A une partie de E et x un élément de E ?
2. Combien existe-t'il de couples (A, x) avec A une partie de E et x un élément de A ?

Correction

1. Il s'agit en fait de trouver le cardinal du produit cartésien $\mathcal{P}(E) \times E$. D'après le cours c'est

$$\boxed{\text{Card}(\mathcal{P}(E) \times E) = E^n \times n}$$

2. La question est plus délicate puisque ce n'est plus un produit cartésien. En effet le nombre de choix de x

dépend en fait du choix de A ! Voici donc une façon de construire ces objets.

(a) On choisit une partie A de E non vide ($2^n - 1$ choix).

(b) Pour A fixé, on choisit un élément x de A, (Card A choix).

Il apparaît donc essentiel de choisir l'ensemble A en fonction de son cardinal. On procède à la construction suivante :

(a) On choisit un entier $k \in [\![1, n]\!]$,

(b) puis on choisit une partie A de E de cardinal k (il y a $\binom{n}{k}$ choix),

(c) enfin on choisit un élément x de A (il y a k choix).

Ainsi le nombre de couples cherché est

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{n}{k} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\ &= n(1+1)^{n-1} \\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$$

On peut écrire les choses plus formellement en remarquant que

$$\mathcal{P}(E) \backslash \emptyset = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{P}_k(E)$$

On obtient alors, si $\mathcal{C}$ est l'ensemble que l'on cherche à dénombrer :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{A \in \mathcal{P}_p(E)} \bigcup_{x \in A} \{(A, x)\}$$

Ce sont à chaque fois des réunion d'ensembles deux à deux disjoints. Ainsi en passant au cardinal :

$$\begin{aligned}\text{Card } \mathcal{C} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_p(E)} \sum_{x \in A} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_p(E)} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$$

3.3 Démonstrations combinatoires de formules connues

Proposition 27.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration : Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$.
Soit E un ensemble de cardinal n.Par définition $\binom{n}{p} = \text{Card}\mathcal{P}_p(E)$ et $\binom{n}{n-p} = \text{Card}\mathcal{P}_{n-p}(E)$. Nous allons définir une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}_p(E)$ dans l'ensemble $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ ce qui établira l'égalité de leur cardinal.
Soit h l'application définie par :

$$h : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P}_p(E) & \rightarrow & \mathcal{P}_{n-p}(E) \\ A & \mapsto & E \backslash A \end{array} \right.$$

L'application g définie par

$$g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P}_{n-p}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}_p(E) \\ A & \mapsto & E \backslash A \end{array} \right.$$

est son application réciproque. Les deux ensembles sont donc en bijection, ils ont même cardinal on a donc bien

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

■

Proposition 28 (Formule du triangle de Pascal).

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Démonstration : Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$.
Notons E_{n+1} un ensemble fini de cardinal $n+1$ et e_{n+1} un de ces éléments. On note E_n le complémentaire de $\{e_{n+1}\}$ dans E_{n+1}. On a donc Card $E_n = n$.
Soit A une partie de E_{n+1} à $k+1$ éléments. On a alors deux cas possibles :

- A contient l'élément e_{n+1}. Dans ce cas A est de la forme $A = F_n \cup \{e_{n+1}\}$ avec F_n une partie de E_n à k éléments. On a autant de telles parties que de partie de k éléments dans E_n un ensemble à n éléments, c'est à dire $\binom{n}{k}$.
- A ne contient pas e_{n+1}. Dans ce cas, une telle partie est de la forme F_n avec F_n une partie de E_n à $k+1$ éléments. On a autant de telles parties que de parties F_n de E_n à $k+1$ éléments, c'est à dire $\binom{n}{k+1}$.

On en déduit l'égalité :

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

■

Proposition 29 (Formule du binôme de Newton).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration : Soient a et b deux complexes et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

Développer tout ce produit revient à choisir dans chaque facteur l'élément a ou l'élément b. Si on choisit k fois l'élément a (pour $0 \leq k \leq n$), on a donc pris $n-k$ fois l'élément b et on a obtenu l'élément $a^k b^{n-k}$. Reste à déterminer son coefficient. C'est le nombre de fois où on a choisi k fois a parmi les n facteurs, c'est donc $\binom{n}{k}$. d'où finalement :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

■