Lycée Condorcet
PCSI

8 février 2025

DS7 mathématiques
Problèmes

3 heures

Une équation fonctionnelle

On appelle F l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (1) :

$$(1) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \quad \textbf{et} \quad f(x) \geq 0$$

Dans tout le problème f désignera une fonction vérifiant la relation (1).

On notera $\tilde{0}$ la fonction identiquement nulle définie sur $\mathbb{R}$.

Partie I : Quelques propriétés des éléments de F.

1. **Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F.**
2. **Écrire ce que devient (1) dans chacun des cas suivants :**

   $$x = 0 \textbf{ et } y \textbf{ quelconque, } x \textbf{ quelconque et } y = 0\textbf{, } x = y$$

   Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
3. **Montrer que $f(0) = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle (la fonction $\tilde{0}$).**
4. **On suppose que f s'annule pour une valeur réelle $a \neq 0$.**
   On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{a}{2^n}$$

   (a) **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(U_n) = 0$.**
   (b) **En déduire que $f(0) = 0$.**
5. **Déduire des questions précédentes que f est soit égale à $\tilde{0}$ soit elle vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.**
6. **Montrer que f est paire.**

Correction :

1. Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2^{-x^2}$.
   Elle est bien continue.
   Soit $(x,y)^2 \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{array}{rcl} h(x+y)h(x-y) & = & 2^{-(x+y)^2}2^{-(x-y)^2} \\ & = & 2^{-2x^2-2y^2} \\ & = & (2^{-x^2}2^{-y^2})^2 \end{array}$$

On a donc bien, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{h(x+y)h(x-y) = (h(x)h(y))^2}$$

Ainsi h est bien un élément de F.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Si $x = 0$ la relation (1) devient alors :

$$(2) \quad \boxed{f(y)f(-y) = (f(y)f(0))^2}$$

De même si $y = 0$, la relation (1) devient :

$$(3) \quad \boxed{(f(x))^2 = (f(x)f(0))^2}$$

Enfin pour $x = y$, ona :

$$(4) \quad \boxed{f(2x)f(0) = (f(x))^4}$$

D'après la relation (3) on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f(x))^2(1 - f(0)^2) = 0$$

D'où en particulier pour $x = 0$

$$(f(0))^2(1 - f(0)^2) = 0$$

Ainsi, comme $\mathbb{R}$ est intègre, $f(0^2 = 1$ ou $f(0)^2 = 0$. Ainsi comme f est positive

$$\boxed{f(0) = 1 \text{ ou } f(0) = 0}$$

3. Procédons par double implications.

   - Si f est identiquement nulle on a bien sûr :

   $$\boxed{f(0) = 0}$$

   - Supposons maintenant que $f(0) = 0$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a, d'après (4) :

   $$f(2x)f(0) = (f(x))^4$$

   et ainsi, comme $f(0) = 0$:

   $$(f(x))^4 = 0$$

   d'où :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0}$$

4. (a) On montre par récurrence l'assertion $P(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$P(n) : f(U_n) = 0$$

   - L'initialisation set vérifiée par l'hypothèse $f(a) = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supoosons que $P(n)$ est vraie. C'est à dire $f(U_n) = 0$. Or d'après (4) on a :

   $$f(2U_{n+1})f(0) = (f(U_{n+1}))^4 \iff f(U_n)f(0) = (f(U_{n+1}))^4$$

   Ainsi $(f(U_{n+1}))^4 = 0$, on a donc bien, par intégrité de $\mathbb{R}$:

   $$\boxed{f(U_{n+1}) = 0}$$

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(U_n) = 0}$$

(b) Notons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et, par définition de F, la fonction $f$est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en 0 ainsi d'après la caratérisation séquentielle de la limite :

$$f(U_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$$

Or on a montré à la question précédente que la suite $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ était la suite identiquement nulle et donc de limite nulle. On a donc bien

$$\boxed{f(0) = 0}$$

5. - Suposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$, si $a = 0$ nous avons montrer à la question 3 que $f = \tilde{0}$ et si $a \neq 0$ on a montré à la question $(4)b$ que $f(0) = 0$ et donc d'après la question (3) $f = \tilde{0}$. Ainsi si la fonction f s'annule en un point elle est identiquement nulle.
   - Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ alors comme par définition pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$ on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

6. Notons tout d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
Si f est idetiquement nulle alors elle est paire.
Supposons que f n'est pas idetiquement nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ ainsi, d'après la question (2), $f(0) = 1$, d'où d'après la relation (2) démontré dans la question (2)

$$f(x)f(-x) = (f(x))^2$$

et comme $f(x) \neq 0$

$$f(-x) = f(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc paire.}}$$

Partie II : Explicitation des éléments de F.

Soit G l'enemble des fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\exists f \in F\backslash\{\tilde{0}\} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \ln(f(x)).$$

On note g une fonction de G et $\lambda = g(1)$.

1. **Montrer à l'aide de la relation (1) vérifiée par f, que g vérifie la relation (2) :**

$$(2) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$$

2. **Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.**
   (a) **Montrer à l'aide de la relation (2),** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(nx) = n^2 g(x)$.
   (b) **En déduire la relation :** $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(nx) = n^2 g(x)$.
   (c) **Enfin montrer que :** $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(rx) = r^2 g(x)$.
   On pourra remarquer qu'un rationnel est un quotient d'entiers.
   Puis que

$$\forall r \in \mathbb{Q} \qquad g(r) = \lambda r^2$$

3. **(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :**

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

(b) En déduire une forme explicite de g.

(c) Puis une forme explicite de f.

Corrigé :

1. Soit f l'application de $F\backslash\{\tilde{0}\}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \ln(f(x))$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a d'après les propriétés de la fonction ln et la relation (1)

$$\begin{aligned} g(x+y) + g(x-y) &= \ln(f(x+y)) + \ln(g(x-y)) \\ &= \ln(f(x+y)f(x-y)) \\ &= \ln((fx)f(y))^2) \\ &= 2\ln(f(x)) + 2\ln(f(y)) \end{aligned}$$

On a donc bien par définition de g

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y)}$$

2. Comme f est non identiquement nulle elle ne s'annule par et $f(0) = 1$ ainsi

$$g(0) = \ln(f(0) = \ln 1$$

d'où

$$\boxed{g(0) = 0}$$

La fonciton g est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symtrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, comme f est paire :

$$g(-x) = \ln(f(-x)) = \ln(f(x)) = g(x)$$

Ainsi g est paire.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que l'assertion définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$P(n) : g(nx) = n^2 g(x) \text{ et} g((n+1)x) = (n+1)^2 g(x)$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On vient de montrer que $g(0) = 0$, d'où

$$\boxed{g(0x) = 0^2 g(x)}$$

De plus

$$\boxed{g(x) = 1^2 g(x)}$$

Ainsi $P(0)$est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$ vraie.
  Comme $P(n)$ est supposée vraie, on a déjà $g((n+1)x) = (n+1)^2 g(x)$. Montrons la deuxième égalité de $P(n+1)$. Remarquons que

$$g((n+2)x) \quad = \quad g((n+1)x + x)$$

  Ainsi d'après (2)

$$g((n+2)x) = 2\left(g((n+1)x) + g(x)\right) - g(nx)$$

  Ainsi comme $P(n)$ est supposée vraie :

$$\begin{aligned} g((n+2)x) &= 2(n+1)^2 g(x) + 2g(x) - n^2 g(x) \\ &= (2n^2 + 4n + 2 + 2 - n^2) g(x) \\ &= (n^2 + 4n + 4) g(x) \end{aligned}$$

  On a donc bien

$$\boxed{g((n+2)x) = (n+2)^2 g(x)}$$

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(nx) = n^2 g(x)$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, on écrit $n = -m$ où $m \in \mathbb{N}$. Comme g est paire et d'après la question précédente, on a

$$g(nx) = g(-mx) = g(mx) = m^2 g(x) = (-m)^2 g(x)$$

on a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \quad g(nx) = x^2 g(x)}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$r = \frac{p}{q}.$$

Notons tout d'abord que

$$g(x) = g\left(q \times \frac{1}{q} x\right)$$

Ainsi d'après la question précédente :

$$g(x) = q^2 g\left(\frac{1}{q} x\right) \Longleftrightarrow g\left(\frac{1}{q} x\right) = \frac{1}{q^2} g(x)$$

Avec le résultat de la question $(2)b$ on obtient :

$$g\left(\frac{p}{q} x\right) = p^2 g\left(\frac{1}{q} x\right) = \frac{p^2}{q^2} g(x)$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q} \quad g(rx) = r^2 g(x)}$$

En appliquant le résultat à $x = 1$ et comme $g(1) = \lambda$ on obtient :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q} \quad g(r) = \lambda r^2}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ par définition de la partie entière on a :

$$10^n x - 1 \leq \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$$

Ainsi comme 10^n est strictement positif :

$$x - \frac{1}{10^n} \leq u_n \leq x$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

(b) Notons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est un rationnel ainsi d'après la question 2.(c) on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(u_n) = \lambda(u_n)^2$$

Or, d'une part, par produit, la suite $(\lambda u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λx^2.
D'autre part comme $f \in F$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc g est une composée d'applications continues, elle est donc continue. On a ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité :

$$g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$$

et donc, par unicité de la limite :

$$g(x) = \lambda x^2$$

(c) Notons que

$$\forall x \in \mathbb{R} g(x) = \ln(f(x)) \iff \forall x \in \mathbb{R} f(x) = e^{g(x)}$$

On note $\lambda = \ln(f(1)$.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{\lambda x^2}$$

Matrices magiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice magique si et seulement si, il existe un réel $\sigma(M)$ tel que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \\ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,i} = \sigma(M), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,n-i+1} = \sigma(M) \end{cases}$$

Autrement dit une matrice magique est une matrice dont toutes les sommes des coefficients sur chaque ligne, toutes les sommes des coefficients sur chaque colonne, et des éléments sur les deux diagonales sont égales.

Partie I : Matrices magiques de taille 3×3.

On se place dans cette partie dans l'ensemble des matrices carrées réelles de taille 3 (ici $n = 3$). On considère, de plus, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. **Vérifier que A, B C et F sont magiques et que $A + B = -2F$.**
2. **Montrer que la somme de deux matrices magiques est une matrice magique, que la transposée d'une matrice magique est une matrice magique et que le produit par un scalaire d'une matrice magique est encore une matrice magique.**
3. **On étudie le lien entre matrice magique et matrice symétrique ou matrice antisymétrique.**
   (a) **Justifier que toute matrice antisymétrique peut s'écrire sous la forme**

   $$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   où α, β et γ sont trois réels.
   En déduire que l'ensemble des matrices magiques antisymétriques est l'ensemble :

   $$\{\alpha(A + F) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

   (b) **Exprimer les matrices magiques symétriques telles que $\sigma(M) = 0$ (celles dont les sommes des éléments sur chaque ligne, sur chaque colonnes et les diagonales sont nulles) en fonction de F.**
   (c) **En déduire que l'ensembles des matrices magiques symétriques est l'ensemble :**

   $$\{\lambda C + \mu F \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

4. **(a) Montrer, par analyse synthèse, que toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique et que ce couple est unique.**
   (b) Montrer que si M est une matrice magique, la matrice symétrique M' et la matrice antisymétrique M'' telles que
   $$M = M' + M''$$
   sont elles aussi des matrices magiques.
   (c) Déduire des questions précédentes que l'ensemble des matrices magiques est l'ensemble :
   $$\{\lambda A + \beta B + \gamma C \mid (\lambda, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$$
5. **On étudie maintenant l'effet du produit sur les matrices magiques.**
   (a) Calculer A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB. Lesquelles de ces différentes matrices sont magiques ?
   (b) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices magiques soit magique ? En déduire toutes les matrices magiques produits de deux matrices magiques.
   (c) Véfifier que le produit d'une matrice magique et d'une matrice de la forme $\lambda C + \mu I$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ est une matrice magique.
   (d) Vérifier que les puissances paires d'une matrice magique ne sont, en général, pas magiques mais que les puissances impaires sont toujours magiques.

Corrigé :

1. Il suffit de calculer !
2. Soient M et N deux matrices magiques de taille 3×3, monrons que leur somme est encore une matrice magique. Notons $\sigma(M)$ et $\sigma(N)$ la somme d'une de leur ligne.
   Soit $i \in [\![1, 3]\!]$, on a, par définition de la somme de deux matrices :
   $$\sum_{j=1}^{3} [M+N]_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} [M]_{i,j} + \sum_{j=1}^{3} [N]_{i,j}$$
   Et comme les matrices M et N sont magiques :
   $$\sum_{j=1}^{3} [M+N]_{i,j} = \sigma(M) + \sigma(N)$$
   Soit $j \in [\![1, 3]\!]$ on a de même,
   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} [M+N]_{i,j} &= \sum_{i=1}^{3} [M]_{i,j} + \sum_{i=1}^{3} [N]_{i,j} \\ &= \sigma(M) + \sigma(N)\end{aligned}$$
   Puis
   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} [M+N]_{i,i} &= \sum_{i=1}^{3} [M]_{i,i} + \sum_{i=1}^{3} [N]_{i,i} \\ &= \sigma(M) + \sigma(N)\end{aligned}$$
   Et enfin
   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} [M+N]_{i,3-i+1} &= \sum_{i=1}^{3} [M]_{i,3-i+1} + \sum_{i=1}^{3} [N]_{i,3-i+1} \\ &= \sigma(M) + \sigma(N)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } M+N \text{ est bien magique, on a de plus } \sigma(M+N)=\sigma(M)+\sigma(N).}$$

Montrons M^T est une matrice magique, on a, par définition de la transposée :

$$\sum_{j=1}^{3}[M^T]_{i,j} = \sum_{j=1}^{3}[M]_{j,i}$$

Et comme la matrice M est magique :

$$\sum_{j=1}^{3}[M]_{i,j} = \sigma(M)$$

Soit $j \in [\![1,3]\!]$ on a de même,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}[M^T]_{i,j} &= \sum_{i=1}^{3}[M]_{j,i} \\ &= \sigma(M)\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}[M^T]_{i,i} &= \sum_{i=1}^{3}[M]_{i,i} \\ &= \sigma(M)\end{aligned}$$

Et enfin

$$\sum_{i=1}^{3}[M^T]_{i,3-i+1} = \sum_{i=1}^{3}[M]_{3-i+1,i}$$

On procède au changement d'indice $l = 3-i+1$ dans la dernière somme et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}[M^T]_{i,3-i+1} &= \sum_{l=1}^{3}[M]_{l,3-l+1} \\ &= \sigma(M)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } M^T \text{ est bien magique, on a de plus } \sigma(M^T)=\sigma(M).}$$

Enfin, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on a, par définition du produit d'une matrice par un scalaire :

$$\sum_{j=1}^{3}[\lambda M]_{i,j} = \lambda\sum_{j=1}^{3}[M]_{j,i}$$

Et comme la matrice M est magique :

$$\sum_{j=1}^{3}[M]_{i,j} = \lambda\sigma(M)$$

Soit $j \in [\![1,3]\!]$ on a de même,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}[\lambda M]_{i,j} &= \sum_{i=1}^{3}\lambda[M]_{j,i} \\ &= \lambda\sigma(M)\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}[\lambda M]_{i,i} &= \sum_{i=1}^{3}\lambda[M]_{i,i} \\ &= \lambda\sigma(M)\end{aligned}$$

Et enfin

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}[\lambda M]_{i,3-i+1} &= \sum_{i=1}^{3}\lambda[M]_{i,3-i+1}\\ &= \lambda\sigma(M)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } \lambda M \text{ est bien magique, on a de plus } \sigma(\lambda M)=\lambda\sigma(M).}$$

3. (a) Soit M une matrice de taille 3×3 antisymétrique.
Soit $i \in [\![1,3]\!]$, on a, par définition d'une matrice antisymétrique

$$[M]_{i,i} = -[M]_{i,i} \Longleftrightarrow 2[M]_{i,i} = 0 \Longleftrightarrow [M]_{i,i} = 0$$

Ainsi les coefficients sur la diagonale sont nuls.
Notons $\alpha = [M]_{3,2}$, $\beta = [M]_{1,3}$ et $\gamma = [M]_{2,1}$, par définition d'une matrice antisymétrique on a alors :

$$[M]_{2,3} = -\alpha,\quad [M]_{3,1} = -\beta \text{ et } [M]_{2,1} = -\gamma$$

La matrice M est alors égale à la matrice

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$

Soit M une matrice antisymétrique de taille 3×3. D'après ce qui précède, il existe trois réels α, β et γ tels que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, comme M est magique, il existe un réel $\sigma(M)$ tel que :

$$\begin{cases} -\gamma+\beta &= \sigma(M)\\ \gamma-\alpha &= \sigma(M)\\ -\beta+\alpha &= \sigma(M)\\ 0+0+0 &= \sigma(M)\end{cases}$$

Les autres équations sont des équations propostionnelles à celles notées. Et ce système est équivalent à

$$\alpha = \beta = \gamma$$

Ainsi si M est magique et antisymétrique alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} = -\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\alpha(A+F)$$

Réciproquement toutes les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

où α est un réel sont magiques et antisymétriques. L'ensemble des matrices antisymétrique et magique est donc l'ensemble :

$$\boxed{\{-\alpha(A+F) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} = \{\alpha(A+F) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}}$$

(b) Notons qu'une matrice de la forme

$$\alpha F = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

où α est un réel est à la fois magique et symétrique et que $\sigma(\alpha F) = 0$.
Réciproquement considérons une matrice M symétrique et magique telle que $\sigma(M) = 0$. On montre, comme à la question précédente que M est symétrique si et seulement si il existe 6 réel x_i avec $i \in [\![1, 6]\!]$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

Et comme la matrice M est magique on a le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_6 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

La combinaison linéaire de lignes $L_1 - L_2 + L_3 - L_4$ donne la ligne

$$2x_3 - 2x_4 = 0$$

Ainsi $x_3 = x_4$, d'où en substituant dans la dernière ligne $x_3 = 0$, le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ainsi M symétrique et magique implique que les x_i vérifient :

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = x_1 \\ x_6 = -x_1 \end{cases}$$

Ainsi, si M est une matrice symétrique et magique tel que $\sigma(M) = 0$ il existe un réel x_1 tel que :

$$\boxed{M = x_1 F}$$

(c) Soit M une matrice symétrique et magique. Notons que $\frac{-\sigma(M)}{3}C$ est une matrice symétrique et magique (éventuellement nulle) avec $\sigma\left(\frac{-\sigma(M)}{3}C\right) = -\sigma(M)$. De plus, la somme de deux matrices symétriques est symétrique et nous avons vu que la somme de deux matrices magiques est magique ainsi la matrice $M - \frac{\sigma(M)}{3}C$ est une matrice symétrique et magique et qui vérifie, d'après la question (2) :

$$\sigma\left(M - \frac{\sigma(M)}{3}C\right) = \sigma(M) - \sigma(M) = 0$$

Ainsi d'après la question précédente il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M - \frac{\sigma(M)}{3}C = \mu F \Longleftrightarrow M = \frac{\sigma(M)}{3}C + \mu F$$

Une matrice symétrique et magique est donc bien combinaison linéaire des matrices C et F.

Réciproquement une combinaison linéaire des matrices C et F est bien symétrique comme combinaison linéaire de matrices symétriques et magique comme combinaison linéaire de matrices magiques.

L'ensemble des matrices symétriques et linéaires est donc bien

$$\boxed{\left\{\lambda C + \mu F \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

4. (a) Voir TD.
   (b) D'après la question précédente les matrices M' et M'' sont des combinaisons linéaires de M et M^T. Or par hypothèse M est magique donc d'après la question 2., M^T est magque et ainsi, toujours d'après cette question, M' et M'' aussi.
   (c) Soit M une matrice magique. D'après les questions 4.(a) et 4.(b) il existe deux matrices magiques M' et M'' la première symétrique et la deuxième antisymétrique telles que

$$M = M' + M''$$

Ainsi, d'après la question 3.(a), il existe un réel α tel que :

$$M' = \alpha A + \alpha F$$

et d'après la question 3.(c), il existe deux réels λ et μ tels que

$$M'' = \lambda C + \mu F$$

On a ainsi :

$$M = \alpha A + (\mu + \alpha)F + \lambda C$$

Mais d'après la question 1 on a

$$F = \frac{-1}{2}(A + B)$$

D'où

$$M = \frac{\alpha + \mu}{2}A + \frac{-(\alpha + \mu)}{2}B + \lambda C$$

la matrice M est bien une combinaison linéaire des matrices A, B et C.

Réciproquement, comme A, Bet C sont des matrices magiques, une combinaison linéaire de ces matrices est bien une matrices magique.

L'ensemble des matrices magiques est donc égal à

$$\boxed{\left\{\lambda A + \beta B + \gamma C \mid (\lambda, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\right\}}$$

5. (a) Un calcul simple permet de montrer que

$$A^2 = B^2 = AC = BC = CB = 0 \quad \text{et que} \quad C^2 = 3C$$

Toutes ces matrices sont magiques.

(b) Soit M_1 et M_2 deux matrices magiques. D'après la question 4.(c) il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$M_1 = \lambda_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C, \quad \text{et} \quad M_2 = \lambda_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C$$

Ainsi d'après la question précédente on a :

$$M_1 M_2 = \lambda_1 \beta_2 AB + \lambda_2 \beta_1 BA + \gamma_1 \gamma_2 3C$$

Or comme C est magique $M_1 M_2$ est magique si et seulement si $\lambda_1 \beta_2 AB + \lambda_2 \beta_1 BA$ est magique. Or

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\lambda_1 \beta_2 AB + \lambda_2 \beta_1 BA = \begin{pmatrix} 2\lambda_2\beta_1 + 6\lambda_1\beta_2 & -4\lambda_2\beta_1 & 2\lambda_2\beta_1 - 6\lambda_1\beta_2 \\ -4\lambda_2\beta_1 & 8\lambda_2\beta_1 & -4\lambda_2\beta_1 \\ 2\lambda_2\beta_1 - 6\lambda_1\beta_2 & -4\lambda_2\beta_1 & 2\lambda_2\beta_1 + 6\lambda_1\beta_2 \end{pmatrix}$$

Notons que les sommes des termes des lignes et des colonnes de cette matrice est nulle. En faisant la somme des termes des deux diagonales il reste donc que cette matrice est magique si etseulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 12\lambda_2\beta_1 + 12\lambda_1\beta_2 & = & 0 \\ 12\lambda_2\beta_1 - 12\lambda_1\beta_2 & = & 0 \end{array} \right. \iff \lambda_1\beta_2 = \lambda_2\beta_1 = 0 \iff \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \text{ et } \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \text{ et } \beta_1 = 0 \end{array}$$

Ainsi les produits magiques de matrices magiques sont les matrices de la forme :

$$(\beta_1 B + \gamma_1 C)(\beta_2 B + \gamma_2 C); (\lambda_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C)\gamma_2 C; \gamma_1 C(\beta_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C); (\lambda_1 A + \gamma_1 C)(\lambda_2 A + \gamma_2 C)$$

(c) Soit $M = \lambda_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C$ une matrice magique et soit (γ_2, μ) deux réels. On a

$$M(\gamma_2 C + \mu I_3) = \lambda_1 \mu A + \beta_1 \mu B + (\gamma_1 \mu + 3\gamma_1\gamma_2)C$$

Cette matrice est bien une combinaison linéaire des matrices A, B et C c'est donc une matrice magique.

(d) Soit M une matrice magique. D'après la question 4.(c) il existe $(\lambda, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = \lambda A + \beta B + \gamma C$$

On a alors, d'après la question précédente :

$$M^2 = \lambda\beta(AB + BA) + 3\gamma^2 C$$

Mais on remarque que

$$AB + BA = 12 I_3 - 4C$$

Ainsi, on a

$$M^2 = 12\lambda\beta I_3 + (3\gamma^2 - 4\lambda\beta)C$$

Comme $(3\gamma^2 - 4\lambda\beta)C$ est magique, M^2 est magique si et seulement si $12\lambda\beta I_3$ est magique c'est à dire si etseulement si $\lambda\beta$ est nul.
Il existe donc des matrices magiques telles que leur carré ne l'est pas.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^{2n} n'est pas nécessairement magique.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ d'après ce que l'on vient de montrer il existe $\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M^{2n} = (\lambda I_3 + \beta C)^n$$

Comme les matrices I_3 et C commutent on a :

$$M^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \beta^{n-k} C^{n-k}$$

Mais on peut montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ $C^k = 3^k C$. On a donc

$$M^{2n} = \lambda^n I_3 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \lambda^k (3\beta)^{n-k} C$$

Ainsi M^{2n} est une combinaison linéaire de I_3 et C qui n'est pas nécessairement une matrice magique.
La matrice M^3 est le produit de M qui est magique avec une combinaison linéaire de I_3 et de C.
Ainsi d'après la question précédente M^3 est magique.
On montre ensuite par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$

$$P(n) : M^{2n+1} \text{ est magique.}$$

On vient d'initialiser la propriété à $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie, la matrice M^{2n+1} est donc magique. Or on a

$$M^{2n+3} = M^{2n+1} M^2$$

Or M^2 est une combinaison linéaire de I_3 et C ainsi M^{2n+3} est matrice magique.
Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que M^{2n+1} est magique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II : Matrices magiques en dimension4

On se place dans cette partie dans l'ensemble des matrices carrées de taille 4.
Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **Montrer que la matrice A est magique.**
2. **Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I_4 (la matrice identité de taille 4).**
3. **Montrer que, pour tout entier p, il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que**

$$A^p = a_p A + b_p I_4.$$

On ne demande pas de calculer ces entiers.

4. **Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, la matrice A^p n'est pas magique.**

Corrigé :

1.
2. On a $A^2 = 2I_4 + A$.

3. Montrons la propriété par récurrence. Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P(p)$ l'assertion

$$P(p) : \exists (a_p, b_p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad A^p = a_p A + b_p I_4$$

La propriété est vraie pour $p = 0$, en effet :

$$A^0 = 1 \times I_4 + 0 \times A$$

Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $P(p)$ vraie. Ainsi il existe deux entiersstrictement positifs a_p et b_p tels que

$$A^p = a_p A + b_p I_4$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcc} A^{p+1} & = & A(a_p A + b_p I_4) \\ & = & a_p A^2 + b_p A \\ & = & a_p(I_4 + A) + b_p A \\ & = & (a_p + b_p)A + a_p I_4 \end{array}$$

Or la somme de deux entiers strictement positifs est un entier positif ainsi $P(p+1)$ est vraie.
Le prinicpe de récurrence permet ainsi de conclure que pour tout $p \in \mathbb{N}$ $A(p)$ est vraie.

4. On a pour tout $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$aA + bI_4 = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & a \\ 0 & a & b & a \\ 0 & a & a & b \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas magique. En effet la somme des termes de la première ligne est égal à $2a + b$ alors que la somme des termes sur la diagonale "inversée" est égale à $2a$, si la matrice était magique on aurait :

$$2a + b = 2a \Longleftrightarrow b = 0$$

Or b est non nul. D'où la contradiction.
Mais d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ A^p est de cette forme là, elle n'est donc pas magique.

Partie III : Matrices semi-magiques en dimension n

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **semi-magique** si et seulement si il existe un réel $\sigma(M)$ tel que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!] & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \\ \forall j \in [\![1, n]\!] & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M]_{i,j} = \sigma(M), \end{cases}$$

Autrement dit une matrice est semi magique si et seulement si les sommes des coefficients de chaque ligne et les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.
Notons J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Montrer qu'une matrice A est semi-magique si et seulement si $AJ_n = J_n A = \lambda J_n$.
   Exprimer ce λ en fonction de $\sigma(A)$.
2. Montrer que le produit de deux matrices semi-magiques est encore une matrice semi-magique.
   Et que si A et B sont deux matrices semi-magiques alors

$$\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$$

3. Soit A une matrice semi-magique.
   (a) On suppose que A est inversible. Montrer que $\sigma(A) \neq 0$ que A^{-1} est encore une matrice semi-magique et que
   $$\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$$
   (b) Réciproquement, on suppose que $\sigma(A) \neq 0$. Peut-on conclure que A est inversible ? On raisonnera d'abord en dimension 2 puis en bonus en dimension quelconque.