Lycée Condorcet — Avril 2025
PCSI

Dimension finie.

Dans cette feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1.
Dans $\mathbb{R}^3$, posons $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3)$, $u_3 = (1,-1,0)$. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner, dans chacun des cas suivants, les coordonnées dans cette base du vecteur v proposé.
a) $v = (1,0,0)$ b) $v = (0,1,0)$ c) $v = (0,0,1)$.

Exercice 2.
Dans chacun des cas suivants, justifier que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E proposé est de dimension finie, donner une base de E et préciser sa dimension de E.

a) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + \mathbf{i}y - z = 0\right\}$ b) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+t=0 \end{array}\right.\right\}$

c) On fixe $n \in \mathbb{N}$, et E est l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ qui admettent 1 pour racine (on vérifiera que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$).

d) E est le sous-espace vectoriel de l'espace des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ défini par : $E = \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$, où

$$g_1 : x \longmapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad g_2 : x \longmapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad g_3 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{et} \quad g_4 : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

e) E est l'espace des suites réelles N-périodiques, où $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé (on s'assurera que E est bien un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles).

Exercice 3.
Calculer le rang des familles suivantes.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, (u_1, u_2, u_3, u_4), où $u_1 = (1,2,1,2)$, $u_2 = (1,-1,-2,3)$, $u_3 = (1,5,4,1)$, $u_4 = (-1,4,5,-4)$.
2. Dans $\mathbb{C}^5$, (v_1, v_2, v_3), où $v_1 = (1,-1,1,-1,1)$, $v_2 = (2,1,0,-1,-2)$, $v_3 = (1,2,-1,0,0)$.
3. Dans $\mathbb{R}[X]$, (P_1, P_2, P_3, P_4), où $P_1 = 1+2X+X^2+2X^3$, $P_2 = 1-X-2X^2+3X^3$, $P_3 = 1+5X+4X^2+X^3$, $P_4 = -1+4X+5X^2-4X^3$.
4. Dans $\mathbb{C}[X]$, (Q_1, Q_2, Q_3), où

$$Q_1 = 1-(X-2)+(X-2)^2-(X-2)^3+(X-2)^4, \qquad Q_2 = 2+(X-2)-(X-2)^3-2(X-2)^4,$$

$$Q_3 = 1+2(X-2)-(X-2)^2.$$