# Commutant d'une matrice

Soit une matrice $M$ de $M_3(\mathbb{R})$. On définit le **commutant** de $M$ comme l'ensemble des matrices qui commutent avec $M$. Cet ensemble sera noté $\mathcal{C}_M$ ; on a donc

$$\mathcal{C}_M = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \quad AM = MA\}\,.$$

On se propose dans ce problème d'établir quelques propriétés générales des ensembles $\mathcal{C}_M$ et d'expliciter les commutants de certaines matrices particulières.
On notera $\mathcal{P}_M$ l'ensemble des "polynômes en $M$", c'est à dire

$$\mathcal{P}_M = \left\{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k M^k \quad n \in \mathbb{N}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}.$$

Par exemple, $2M^6 - M^3 + 3M + I_3 \in \mathcal{P}_M$.

**Partie A**. Propriétés générales.

Dans toute cette partie, $M$ est (sauf précision) une matrice quelconque fixée dans $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{P}_M$ sont des sous-espaces vectoriels de$M_3(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathcal{C}_M$ est stable par produit. En déduire que si $A$ est dans $\mathcal{C}_M$, alors $A^n$ aussi pour tout $n$ entier naturel.
3. Démontrer que $\mathcal{P}_M \subset \mathcal{C}_M$.
   *Indication : on pourra se passer de calculs en utilisant les questions précédentes.*
4. Démontrer que $\mathcal{C}_M$ est stable par inverse, c'est à dire que si $A$ est une matrice inversible de $\mathcal{C}_M$, alors $A^{-1} \in \mathcal{C}_M$.
5. Supposons ici que $M$ symétrique. Démontrer qu'alors $\mathcal{C}_M$ est stable par transposition. Est-ce vrai si $M$ est antisymétrique ?

**Partie B**. Commutant de certaines matrices diagonales.

Soient $\quad D_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

1. Que valent les ensembles $\mathcal{C}_{0_{3,3}}$ et $\mathcal{C}_{I_3}$ ? Quelle est la dimension de ces espaces. Comparer ces espaces avec $\mathcal{P}_{0_{3,3}}$ et $\mathcal{P}_{I_3}$.
2. Démontrer que $\mathcal{C}_{D_1}$ est l'ensemble des matrices diagonales.
   Quelle est sa dimension ?
3. Trouver une base de $\mathcal{C}_{D_2}$. Quelle est sa dimension.
4. Même question pour $\mathcal{C}_{D_3}$.

**Partie C**. Commutant d'une certaine matrice diagonalisable.

Soient $M = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad$ et $\quad P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

1. Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
2. Montrer que $PMP^{-1}$ est une matrice diagonale que l'on notera $D$.
3. Démontrer que

   $$\forall A \in M_3(\mathbb{R}) \quad A \in \mathcal{C}_M \iff PAP^{-1} \in \mathcal{C}_D.$$

   Expliciter $\mathcal{C}_M$. *Combien de degrés de liberté ?*

**Partie D**. Commutant d'une certaine matrice nilpotente.
On note dans cette partie

$$N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que la famille $(I_3, N, N^2)$ est une base de $\mathcal{P}_N$.
2. Démontrer que $\mathcal{C}_N = \mathcal{P}_N$. Le commutant de $N$ est-il stable par transposition ?
3. Expliciter $GL_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_N$.

## Corrigé