

Interpolation de Lagrange

Soit $n \geq 1$ et un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, où les a_i sont deux à deux distincts. On définit, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le polynôme

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

On vient donc de définir $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ une famille de $n+1$ polynômes associés au $(n+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_n)$.

1. Afin de bien comprendre la définition précédente, prenons par exemple

$$n = 3, \quad a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2.$$

Expliciter la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) associée à $(-1, 0, 1, 2)$.

2. Retour au cas général. Soient $i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Que vaut $L_i(a_k)$? On pourra utiliser le symbole de Kronecker.
3. On se propose de démontrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ directement à partir de sa définition. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par analyse-synthèse, prouver que P s'écrit comme combinaison linéaire des L_i et que cette décomposition est unique.

Pourquoi les coordonnées de P sur la base $(L_0, \dots, L_n)$ sont-elles particulièrement faciles à calculer?

4. Application. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_n)$. En utilisant la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$, justifier qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(a_i) = b_i.$$

Ce qui précède garantit notamment l'existence et l'unicité d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P(-1) = 3 \quad P(0) = 1 \quad P(1) = 2 \quad \text{et} \quad P(2) = -1.$$

Le calculer. Chercher la définition du mot *interpolation*. Pourquoi qualifie-t-on les polynômes L_i de polynômes *interpolateurs*?